

**JOSÉ FILIPE BIZARRO DE MEIRELES**

**ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS POR  
MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS  
IDENTIFICADOS EXPERIMENTALMENTE**

**TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE DO MINHO PARA OBTENÇÃO  
DO GRAU DE DOUTOR NO RAMO DE ENGENHARIA MECÂNICA,  
ÁREA DE MECÂNICA DOS MATERIAIS**

**UNIVERSIDADE DO MINHO**

**- Guimarães 2007 -**



*À Maria José*

*e*

*à Ana Maria*



## RESUMO

O presente trabalho teve como objectivo principal o desenvolvimento de uma nova metodologia de melhoramento de modelos numéricos de elementos finitos aplicados à dinâmica estrutural. Nesta perspectiva foi desenvolvido um programa que, automaticamente, controla um código de elementos finitos e modifica as variáveis iniciais até ser conseguido o melhoramento pretendido.

Para o efeito foram analisadas as causas dos erros subjacentes ao método dos elementos finitos, estudada aprofundadamente de sua forma de funcionamento e executados programas de obtenção automática de resultados. Estes programas foram aplicados a exemplos reais formados por conjuntos de peças ligadas de formas diferentes e obtidas as características dinâmicas desses exemplos.

Foram realizados ensaios experimentais de análise modal em protótipos semelhantes aos modelos numéricos desenvolvidos. Foram extraídos resultados destes ensaios por identificação modal que foram utilizados como referência para possibilitar a comparação com os modelos numéricos desenvolvidos.

Foi desenvolvido um programa de melhoramento de modelos numéricos recorrendo a ferramentas de optimização. Foram analisados os métodos de optimização disponíveis e escolhidos os mais adequados para a aplicação neste problema. Foi criada uma função objectivo específica e introduzida uma nova forma de correlação, que foi designada ASMAC. O programa foi testado com um número elevado de exemplos e por análise de sensibilidade foi comprovado que as funções envolvidas são altamente não lineares.

Finalmente, o programa foi aplicado aos protótipos desenvolvidos. Como principal conclusão dos resultados obtidos neste trabalho de investigação pode dizer-se que o melhoramento dos modelos foi conseguido razoavelmente e que o melhoramento dos modelos dos conjuntos formados por modelos de peças que já tinham sido melhorados é melhor conseguido que o melhoramento dos mesmos conjuntos a partir dos valores iniciais.



## ABSTRACT

The primary objective of this research work was the development of a new methodology to improve the numerical finite element models applied to structural dynamics. In this perspective, a program was developed that automatically controls a code of finite elements and modifies the initial variables until the intended improvement has been achieved.

For this purpose, the causes for the underlying errors to the finite element method were analysed, its operational mode was studied in depth and programs for automatically obtaining the results were executed. These programs were applied to real examples consisting of assemblies of pieces linked in different ways and the dynamic characteristics of those samples were obtained.

Experimental modal analysis tests were executed in prototypes similar to the numerical models developed. From these tests, results by modal identification were extracted that served as reference to enable their comparison with the numerical models developed.

A program for updating the numerical model was developed with recourse to optimization tools. The available methods were analysed and the most appropriate was chosen to be applied to this problem. A specific objective function was created and a new form of correlation was introduced, designated as ASMAC. The program was tested on a large number of examples and the functions involved were proven by sensibility analysis to be highly non- linear.

Finally, the program was applied to the prototypes developed. The main conclusion of the results obtained in this research was that the updating of the models was reasonably successful. Further, the updating of the models of the assemblies consisting of models of pieces that had already been improved achieved better results than those obtained from the updating of the same assemblies derived from initial values.





## **PALAVRAS-CHAVE**

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

MELHORAMENTO DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

ANÁLISE MODAL

VIBRAÇÕES MECÂNICAS

IDENTIFICAÇÃO MODAL DE ESTRUTURAS

ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

OPTIMIZAÇÃO

CORRELAÇÃO ENTRE MODELOS

PROGRAMAÇÃO

## **KEYWORDS**

FINITE ELEMENT METHOD

FINITE ELEMENT MODEL UPDATING

STRUCTURAL MODAL ANALYSIS

MECHANICAL VIBRATIONS

MODAL IDENTIFICATION

STRUCTURAL DINAMIC ANALYSIS

OPTIMIZATION

MODELS CORRELATION

PROGRAMMING



## AGRADECIMENTOS

O percurso desta tese foi longo mas gratificante. Permitiu-me que penetrasse com profundidade numa vivência diferente da que já tinha experimentado, mas também apaixonante e engrandecedora. Abriram-se-me horizontes que nunca se alcançam, estabeleceram-se-me metas no espaço incerto, convivi com o inesperado, penetrei no desconhecido, resolvi o inverosímil mas fundamentalmente confirmei que vale a pena evoluir. Mas tudo isto só foi possível porque há uma comunidade de pessoas e instituições que me ofereceram o seu apoio, me abriram e clarificaram caminhos que tornaram possível a apresentação deste trabalho. A todos eles o meu muito obrigado. Mas de uma forma especial quero dirigir um agradecimento aos:

Orientadores científicos do trabalho, Professores Jorge Alberto Cadete Ambrósio, Júlio Martins Montalvão e Silva e António Costa Marques de Pinho, pela oportunidade de fazer esta pesquisa, pela sua orientação conhecedora e por terem criado as condições materiais para que o trabalho fosse possível. Eu sempre recebi o seu apoio inequívoco e incondicional;

Colegas do Departamento em geral e do grupo disciplinar em particular, pelos incentivos, atenção e apoios prestados, com destaques para os Professores Augusto Sousa Miranda, José Carlos Fernandes Teixeira, Jaime Carlos Ferreira da Silva por me proporcionarem todo o apoio institucional como Directores do Departamento de Engenharia Mecânica e para as secretárias Maria Luísa e Sandra Lopes;

Sr. Fernando Araújo, técnico do Laboratório de Ensaio de Materiais da UM, Eng. Fernando Oliveira no Laboratório de Vibrações do IST, pelo esforço voluntarioso manifestado na realização dos ensaios experimentais e em especial ao Professor Relógio Ribeiro pelo apoio técnico desinteressado e disponibilidade apresentada.

Estendo também o meu reconhecimento:

À Universidade do Minho pelo financiamento destes anos em dedicação exclusiva a este trabalho e pelo apoio material e Humano concedido;

Às Empresas envolvidas e respectivos funcionários, eis colegas de trabalho, pelos materiais e mão-de-obra oferecidos e todo o apoio prestado.

Finalmente, eu gostaria de agradecer à minha família, em especial a mais próxima, minha mulher Maria José e minha filha Ana Maria pelo seu apoio constante, encorajamento sem fim e convicção na minha capacidade para concluir o trabalho.

***José Filipe Bizarro de Meireles***

# ÍNDICE

|  |       |
|--|-------|
| <b>RESUMO</b>  | iii   |
| <b>ABSTRACT</b>  | v     |
| <b>PALAVRAS-CHAVE</b>  | vii   |
| <b>KEYWORDS</b>  | vii   |
| <b>AGRADECIMENTOS</b>  | ix    |
| <b>ÍNDICE</b>  | xi    |
| <b>NOMENCLATURA</b>  | xv    |
| Matrices e Vectores  | xv    |
| Escalares  | xvi   |
| Subscritos   | xviii |
| Sobrescritos   | xviii |
| Operadores   | xviii |
| Abreviaturas   | xix   |
| <b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO</b>                                     | 1     |
| 1.1 Motivação  | 2     |
| 1.2 Revisão Bibliográfica  | 5     |
| 1.2.1 O Método dos Elementos Finitos na Dinâmica Estrutural        | 6     |
| 1.2.2 Conceitos sobre Melhoramento de Modelos de Elementos finitos | 7     |

|  |           |
|--|-----------|
| 1.2.3 Desenvolvimento na Modelação de Ligações                     | 21        |
| 1.2.4 O caso Particular das Ligações Rebitadas                     | 23        |
| 1.2.5 O Caso Particular das Ligações Aparafusadas                  | 25        |
| 1.2.6 O Caso Particular das Ligações Soldadas                      | 27        |
| 1.3 Âmbito, Objectivo do Trabalho e Estruturação da Tese           | 31        |
| <b>CAPÍTULO 2 – DINÂMICA DE ESTRUTURAS POR ELEMENTOS FINITOS</b>   | <b>33</b> |
| 2.1 Introdução   | 35        |
| 2.2 Equação de Equilíbrio Dinâmico de Estruturas                   | 36        |
| 2.3 Problema de Valores Próprios                                   | 37        |
| 2.3.1 Análise sem amortecimento                                    | 37        |
| 2.3.2 Análise Dinâmica com Amortecimento                           | 41        |
| 2.4 Modelos de Elementos Finitos para Análise Modal                | 45        |
| 2.5 Método dos sub-espacos   | 56        |
| 2.6 Utilização do Programa ANSYS para Análise de Elementos Finitos | 59        |
| 2.7 Erros Associados ao Métodos de Elementos Finitos               | 61        |
| 2.8 Melhoramento de Elementos Finitos e a Correlação entre Modelos | 65        |
| 2.8.1 Afectação da Correlação entre Modelos com ASMAC              | 72        |
| 2.9 Sumario e Discussão  | 78        |
| <b>CAPÍTULO 3 – OPTIMIZAÇÃO DO PROBLEMA DE VIBRAÇÃO</b>            | <b>81</b> |
| 3.1 Introdução   | 82        |
| 3.2 Métodos de Optimização   | 82        |
| 3.2.1 Optimização não Constrangida                                 | 84        |
| 3.2.2 Optimização Constrangida                                     | 88        |
| 3.3 Modelo de Optimização  | 95        |
| 3.3.1 Estrutura de Ficheiros do ANSYS                              | 96        |
| 3.3.2 Definição e Implementação do Modelo de Melhoramento          | 99        |

|  |     |
|--|-----|
| 3.4 Ferramentas Numéricas de Apoio   | 101 |
| 3.5 Melhoramento de Estruturas Analisadas por Elementos Finitos                                  | 104 |
| 3.6 Sumário e Discussão  | 115 |
| <b>CAPÍTULO 4 – PROPRIEDADES QUE INFLUENCIAM A MELHORIA DO MODELO. ANÁLISE DE SENSIBILIDADES</b> | 117 |
| 4.1 Introdução   | 117 |
| 4.2 Viga de Secção Rectangular   | 118 |
| 4.2.1 Ensaio à viga livre  | 123 |
| 4.2.2 Variação nos Parâmetros e o seu Efeito na Optimização                                      | 133 |
| 4.3 Análise da Placa Quadrada  | 142 |
| 4.4 Limitações do Método de Melhoramento.  | 154 |
| 4.4.1 Parâmetros do Método de Melhoramento   | 157 |
| 4.5 Sumário e Discussão  | 163 |
| <b>CAPÍTULO 5 – IDENTIFICAÇÃO MODAL, CONCEITOS BÁSICOS</b>                                       | 165 |
| 5.1 Introdução   | 166 |
| 5.2 Técnicas de Medida   | 173 |
| 5.2 Técnicas de Medida   | 175 |
| 5.3 Métodos de Extração dos Parâmetros. A Identificação Modal                                    | 178 |
| 5.5 Sumário e Discussão de Resultados  | 188 |
| <b>CAPÍTULO 6 – ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL</b>   | 189 |
| 6.1 Introdução   | 189 |
| 6.2 Escolha do Modelo Experimental e a sua modelação numérica                                    | 190 |
| 6.2.1 Preparação das Estruturas e Fiabilidade dos Resultados                                     | 193 |
| 6.2.2 Materialização dos Modelos de Elementos Finitos  | 195 |
| 6.3 Instrumentação e Técnicas Laboratoriais  | 212 |
| 6.4 Ensaaios Experimentais   | 215 |

|   |            |
|---|------------|
| 6.5 Tratamento dos Resultados Experimentais. A Identificação Modal                                | 228        |
| 6.7 Sumário e Discussão dos Resultados  | 237        |
| <b>CAPÍTULO 7 – MELHORAMENTO DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS</b>                                  | <b>241</b> |
| 7.1 Introdução  | 242        |
| 7.2 Tipos de Juntas e a sua Influência nos Modelos de Elementos finitos.                          | 243        |
| 7.3 Melhoramento dos Modelos Numéricos a Partir dos Resultados Experimentais.                     | 245        |
| 7.4 Melhoramento dos Modelos de Elementos Finitos dos Conjuntos a Partir dos Parâmetros Iniciais. | 256        |
| 7.5 Melhoramento dos Modelos de Elementos Finitos a Partir dos Resultados dos Modelos Melhorados. | 266        |
| 7.6 Sumário e Discussão de Resultados   | 280        |
| <b>CAPÍTULO 8 – CONCLUSÕES</b>  | <b>283</b> |
| 8.1 Conclusões  | 283        |
| 8.2 Sugestões para Trabalhos Futuros  | 292        |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>   | <b>295</b> |
| <b>PUBLICAÇÕES</b>  | <b>309</b> |
| <b>APENDICE I – DESENHOS TÉCNICOS DOS PROTÓTIPOS ESTRUTURAIS</b>                                  | <b>311</b> |
| <b>APENDICE II –CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E MECÂNICAS DOS PROTÓTIPOS</b>                        | <b>323</b> |
| <b>APENDICE III – EQUIPAMENTO EXPERIMENTAL: CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS</b>                          | <b>335</b> |



# NOMENCLATURA

## Matrizes e Vectores

| Símbolo                  |                  | Descrição   |
|--------------------------|------------------|---|
| $\Phi$                   | -                | Matriz de modo de vibração  |
| $\Psi$                   |                  | Conjunto de funções de forma de Ritz                              |
| $\bar{\Psi}$             |                  | Subespaço de projecção de K e M                                   |
| $\Lambda$                |                  | Diagonal da matriz com os quadrados das frequências naturais      |
| $\Phi(\omega)$           | -                | Conjunto completo de N modos de vibração normalizados             |
| $\epsilon(t)$            |                  | Campo de extensões do elemento                                    |
| $\sigma(t)$              |                  | Campo de tensões do elemento                                      |
| $\Theta_k$               |                  | Matriz diagonal cujos coeficientes são os valores próprios        |
| $\mathbf{a}$             |                  | Vector acção num sistema de eixos local                           |
| $\mathbf{A}$             |                  | Matriz de coordenadas globais do sistema                          |
| $\mathbf{a}'$            |                  | Vector acção num sistema de eixos global                          |
| $\mathbf{A}'$            |                  | Matriz de coordenadas locais do sistema                           |
| $\mathbf{B}$             |                  | Matriz de extensões do sistema                                    |
| $\bar{\mathbf{b}}$       |                  | Vector constante  |
| $\mathbf{b}(t)$          |                  | Vector esforço genérico   |
| $\mathbf{C}$             | Ns/m             | Matriz de amortecimento de um sistema                             |
| $\mathbf{d}_k$           | -                | Vector direcção de procura durante a iteração k                   |
| $E_x, E_y, E_z$          | N/m <sup>2</sup> | Módulos de Young de elasticidade                                  |
| $\mathbf{F}$             | -                | Matriz rectangular de relação $\mathbf{u}(t)$ com $\mathbf{q}(t)$ |
| $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ |                  | Função de constrangimento de igualdade                            |
| $G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}$ | N/m <sup>2</sup> | Módulos de elasticidade transversal                               |
| $\mathbf{H}$             |                  | Matriz simétrica definida Hessian                                 |

|                            |                      |  |
|----------------------------|----------------------|--|
| $\mathbf{h}(\mathbf{x})$   |                      | Função de constrangimento de desigualdade  |
| $\mathbf{H}_0$             |                      | Matriz simétrica definida inicial Hessian  |
| $\mathbf{I}$               | -                    | Matriz identidade NxN  |
| $\mathbf{J}$               |                      | Matriz jacobiana respeitante ao elemento em estudo                                     |
| $\mathbf{K}$               |                      | Matriz de rigidez de um sistema  |
| $\tilde{\mathbf{K}}$       |                      | Inversa da matriz de rigidez de um sistema   |
| $\boldsymbol{\kappa}$      |                      | Vector a adicionar ao incremento   |
| $\mathbf{M}$               | kg, kgm <sup>2</sup> | Matriz de massa de um sistema  |
| $\mathbf{P}$               | -                    | Matriz de transformação do sistema local para global                                   |
| $\mathbf{p}, \mathbf{p}_0$ | N                    | Vector de carga externa, Vector de carga externa inicial                               |
| $\mathbf{P}_s$             | N                    | Vector de carga global   |
| $\mathbf{q}(t)$            |                      | Vector deslocamento nodal  |
| $\mathbf{T}$               |                      | Matriz de transformação do sistema local para o global                                 |
| $\mathbf{u}(t)$            |                      | Vector deslocamento genérico   |
| $\mathbf{x}$               |                      | Vector deslocamento do sistema; vector de projecto dos parâmetros da função a otimizar |
| $\mathbf{x}^\dagger$       |                      | Valor óptimo ou solução do problema  |
| $\mathbf{x}^\oplus$        |                      | Ponto regular de um conjunto executável  |
| $\mathbf{y}$               | m                    | Vector amplitude modal do modo de vibração   |
| $\mathbf{Z}$               |                      | Matriz resultante da decomposição da matriz $\mathbf{A}$                               |

## Escalares

| Símbolo               |   | Descrição  |
|-----------------------|---|--|
| $\alpha$              | - | receptância  |
| $\alpha^k$            |   | Parâmetro de incremento                                    |
| $\gamma$              | - | Razão de amortecimento modal; função de programação linear |
| $\lambda_i$           |   | Multiplicador de Lagrange                                  |
| $\xi, \eta, \zeta$    |   | Sistema de eixos coordenados natural da placa              |
| $\eta$                | - | Factor de perda de amortecimento                           |
| $\nu_x, \nu_y, \nu_z$ | - | Coefficientes de Poisson                                   |

|                        |                      |  |
|------------------------|----------------------|--|
| $\theta$               | rad                  | Posição angular  |
| $\rho$                 | kg/m <sup>3</sup>    | Densidade da massa do Material   |
| $\sigma$               | m <sup>2</sup> /N    | Tensão normal  |
| $\omega$               | rad/s                | Frequências naturais do sistema; velocidade angular                      |
| $a$                    |                      | Constante  |
| $b$                    |                      | Constante  |
| $C$                    | Ns/m                 | Termo da matriz de amortecimento   |
| $c$                    |                      | Constante  |
| $d$                    |                      | Constante  |
| $f$                    |                      | Função de forma  |
| $f(\mathbf{x})$        |                      | Função objectivo   |
| $h$                    | m                    | Espessura  |
| $i$                    |                      | Ordem i do modo de vibração; grandeza auxiliar                           |
| $k^*, \bar{k}^*$       |                      | Rigidez modal da estrutura   |
| $m$                    |                      | Ordem m do modo de vibração  |
| $m^*$                  | kg, kgm <sup>2</sup> | Massa modal da estrutura   |
| $N$                    | -                    | Número de graus de liberdade do sistema, número de modos de vibração     |
| $n$                    |                      | Ordem n do modo de vibração  |
| $q(\mathbf{p})$        |                      | Função quadrática  |
| $t$                    | s                    | Tempo  |
| $tol$                  | -                    | Número pequeno normalmente igual a 10 <sup>-6</sup>                      |
| $U_e$                  |                      | Energia de extensão virtual das tensões internas                         |
| $W_e$                  |                      | Trabalho virtual das acções externas ao elemento                         |
| $x_I$ a $x_n$          |                      | Conjunto de parâmetros que constituem a solução de uma função a otimizar |
| $y$                    | m                    | Coordenada modal da estrutura  |
| $\nabla f(\mathbf{x})$ |                      | Gradiente da função objectivo  |

## Subscritos

| Símbolo | Descrição   |
|---------|---|
| $n, m$  | Relativo ao caso $n$ , relativo ao caso $m$ diferente do caso $n$ |
| $q$     | Coordenada generalizada   |
| $s$     | Passo da iteração no subespaço                                    |

## Sobrescritos

| Símbolo | Descrição            |
|---------|----------------------|
| $^0$    | Condições iniciais   |
| $e$     | Cada elemento finito |
| $P$     | Ponto genérico $P$   |

## Operadores

| Símbolo                  | Descrição                             |
|--------------------------|---------------------------------------|
| $(\ )^T$                 | Matrix ou vector transposto           |
| $(\dot{\ })$             | Primeira derivada em relação ao tempo |
| $(\ddot{\ })$            | Segunda derivada em relação ao tempo  |
| $(\cdot)$                | Produto escalar interno               |
| $(\times)$               | Produto externo                       |
| $(\partial)$             | Derivada parcial                      |
| $\Delta$                 | Incremento                            |
| $(\delta)$               | Variação de                           |
| $(dV)$                   | Elemento de volume                    |
| $L(\mathbf{x}, \lambda)$ | Função Lagrangeana                    |

## Abreviaturas

| Símbolo | Descrição   |
|---------|---|
| ANSYS   | Código comercial de FEM desenvolvido por ANSYS, INC.  |
| ASMAC   | Procura alternada <i>MAC</i> (alternate searching <i>MAC</i> )                              |
| CAE     | Computer Aided Engineering  |
| COMAC   | Coordenada <i>MAC</i>   |
| DMU     | Método de melhoramento directo da matriz (Direct Matrix Updating Method)                    |
| ECM     | Eigendynamic Constraint Method  |
| EMM     | Método da matriz de erro (Error Matrix Method)  |
| FDM     | Método de diferença finito modificado   |
| FEM     | Método dos Elementos Finitos (Finite Element Method)  |
| FFT     | Transformadas de Fourier (Fast Fourier Transformation)                                      |
| FORTRAN | Linguagem de programação FORMula TRANslation  |
| FRF     | Função de resposta em frequência  |
| GDL     | Graus de liberdade  |
| IES     | Inversa da sensibilidade dos valores e vectores próprios (Inverse Eigensensitivity Methods) |
| LabVIEW | Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench   |
| MAC     | Critério de garantia total (Modal assurance criterium)                                      |
| MATLAB  | Código de cálculo matricial derivado de MATrix LABoratory                                   |
| MSF     | Factor de ponderação modal (Mode scale factor)  |
| RFM     | Métodos de função de resposta (Response Function Methods)                                   |
| TOOLBOX | Módulos específicos do MATLAB   |



## **CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO**

Os Métodos numéricos avançados dos quais o método de elemento finitos é o mais conhecido são extremamente importantes para definição e análise de estruturas complexas de engenharia, tais como naves espaciais, aviões, automóveis, edifícios, pontes, represas, recipientes de retenção, máquinas ferramenta, etc. A modelação por elementos finitos apresenta-se hoje como uma ferramenta indispensável para a elaboração de projectos de engenharia. Neste sentido, a remoção das suas limitações é de crucial importância no desenvolvimento de modelos que permitam análises de qualidade.

Pode-se considerar que a análise dinâmica de uma estrutura é uma extensão da análise estática. O termo dinâmica acrescenta à análise a variação no tempo e a sua consequência em termos de resposta da estrutura que tem de considerar o efeito das acções de inércia resultantes. Por meio de análises dinâmicas e simulações pode-se determinar se uma estrutura em análise responde aos seus requisitos funcionais através da sua resposta ao carregamento dinâmico aplicado. Deste modo, pode ser determinado qual o parâmetro estrutural que mais afecta a resposta dinâmica da estrutura e assim, a estrutura pode ser funcionalmente modificada e melhorada. Podem ser executadas, simultaneamente, simulações de cálculos de resposta no tempo e de resposta em frequência de um sistema. Adicionalmente, podem ser considerados efeitos não lineares no projecto e através da

análise de estrutura melhorar o seu desempenho e aumentar a gama operacional (Mackerle, 2000:39-56).

O melhoramento de modelos de elementos finitos aplicados à dinâmica estrutural insere-se num campo mais vasto da análise dinâmica de estruturas, constituindo uma área de investigação de extrema actualidade e com aplicações industriais de crescente importância. Com os processos de melhoramento de modelos de elementos finitos aplicados à dinâmica estrutural procuram-se corrigir as características dinâmicas de uma estrutura, nomeadamente a sua resposta a solicitações dinâmicas. Geralmente toma-se como ponto de partida uma estrutura existente, em relação à qual se começa por caracterizar o comportamento dinâmico, para o que se recorre, normalmente, à sua modelação dinâmica por elementos finitos. Em paralelo executam-se ensaios de análise de vibrações em laboratório ou estaleiro no protótipo. Um dos objectivos fundamentais do melhoramento de modelos numéricos consiste em determinar qual a modificação a introduzir nos parâmetros inerentes às características mecânicas e geométricas da estrutura para conseguir um determinado comportamento final mais coerente com a referência.

Uma vez que se Pretende poder dispor de modelos dinâmicos fiáveis, é necessário melhorar as várias técnicas de modelação, incluindo as técnicas de identificação das propriedades dinâmicas, a análise modal, a formulação do comportamento dos diversos tipos de ligação, como é o caso das juntas, a minimização das influências dos instrumentos de medição, etc. Neste trabalho, procura-se dar uma contribuição para a área de conhecimento sobre o melhoramento de modelos numéricos aplicados à dinâmica estrutural, através do estudo e desenvolvimento de novas metodologias e ferramentas computacionais suficientemente robustas e potentes, associadas a algumas das subáreas acima mencionadas.

## **1.1 Motivação**

No estado actual do desenvolvimento dos principais bens de equipamento cada vez mais se procuram bons desempenhos e baixos custos, com prazos de concepção muito curtos. A concepção dos produtos tem de ser feita em prazos muito apertados, que dificultam a utilização dos métodos tradicionais de fabricação de vários protótipos, que vão sendo melhorados por intervenções sucessivas. A modelação numérica tem aqui um papel fundamental. Com o aperfeiçoamento constante dos programas de modelação geométrica,



de projecto e de cálculo, a tendência é substituir algumas fases de desenvolvimento experimental por modelos numéricos que são, por sua vez, melhorados. Para isso estes programas têm evoluído consideravelmente de forma a possibilitar a modelação mais rigorosa e aumentar a fiabilidade dos seus resultados. Como consequência os modelos ficam mais complexos e extensos requerendo tempos de processamento muito elevados. É nos programas de cálculo que este problema é mais notado. O processamento de elevadas quantidades de informação acarretam por um lado um aumento considerável de probabilidade de ocorrência de erros de cálculo ou de omissões (Linderholt, 2003:579-588), e por outro um aumento de tempo de processamento incompatível com as necessidades de resposta rápida. No primeiro caso as consequências são a falta de credibilidade nos resultados obtidos, diminuindo a confiança nas soluções. No outro caso, o aumento do tempo de processamento torna difícil a resposta atempada às necessidades do mercado. Acresce que ainda há um grande campo de investigação para a criação de modelos de elementos finitos que melhor modelem o comportamento de alguns materiais, a ligação de montagem entre componentes (Law, 2001:19-39; Ratcliffe, 2000:3-28) e geometrias complexas (Hashemi, 1999:601-624). As vibrações mecânicas (Mackerle, 2000: 39-56) e em particular a identificação das propriedades dinâmicas de máquinas e estruturas, como a massa, a rigidez, o amortecimento, as frequências naturais, os modos de vibração, etc., assume cada vez mais um papel importante em engenharia mecânica. O cálculo ou, pelo menos, a verificação do comportamento dinâmico torna-se, pois, um passo indispensável no ciclo do projecto de engenharia mecânica.

Os métodos numéricos podem dar uma boa resposta em casos de complexidade média mas, por enquanto, ainda não está assegurada a fiabilidade dos resultados obtidos de forma a eliminar completamente a sua validação experimental. Têm vindo a ser feitos esforços significativos para o desenvolvimento de técnicas que permitam a utilização do método dos elementos finitos com parâmetros corrigidos por ensaios sobre estruturas reais. Estas são metodologias de melhoramento de modelos de elementos finitos (finite element updating em inglês ou récalage em francês). Também na análise experimental se têm feito progressos significativos no sentido de se conseguir fiabilidade na caracterização das solicitações dinâmicas e do comportamento de estruturas complexas, apesar das limitações inerentes a qualquer processo experimental. A realização de ensaios exige a existência de protótipos, a utilização de sensores e a análise de resultados, o que acarreta não só dificuldades temporais e de fiabilidade mas também a impossibilidade da sua utilização em

muitas fases do projecto. Outra situação surge quando estruturas já existentes revelam um comportamento dinâmico inaceitável quando em serviço. Por exemplo, do ponto de vista da integridade estrutural, quando o tempo de vida ou período médio entre avarias é demasiado curto, ou do ponto de vista ambiental quando o ruído em funcionamento é demasiado incómodo, ou do ponto de vista sanitário, quando causa danos na saúde dos operadores ou circunstantes, ou ainda do ponto de vista legal se as vibrações estruturais podem causar níveis de ruído que ultrapassam os limites impostos pelos regulamentos em vigor. Nestes casos, torna-se necessária uma análise que permita preconizar as alterações às estruturas em causa que corrijam o problema, minimizando tanto quanto possível os custos de implementação das alterações.

Uma vez na posse dos modelos das subestruturas e componentes estruturais em jogo e conhecido o comportamento dinâmico da estrutura em estudo, pode-se simular o comportamento da mesma após algumas alterações. Neste campo, os métodos utilizados tendem a ser numericamente sensíveis e, embora os princípios teóricos se encontrem bem estabelecidos, a sua implementação computacional levanta alguns problemas que, por vezes, impedem a obtenção de um modelo suficientemente preciso do comportamento global. Os modelos obtidos por análise experimental são frequentemente incompletos quanto às coordenadas, devido às dificuldades no posicionamento do equipamento. As relações teóricas entre os termos das matrizes que caracterizam o comportamento dinâmico podem permitir ultrapassar esta limitação, não fora o facto de também serem forçosamente incompletas em termos das gamas de frequências utilizadas nos ensaios.

Dado que a ligação entre elementos estruturais é realizado através de juntas, o comportamento dinâmico destas é consequentemente decisivo para o comportamento global da estrutura. A caracterização do comportamento dinâmico das estruturas, subestruturas e componentes estruturais é, geralmente, o primeiro passo nos processos de melhoramento estrutural. A regeneração teórica dos resultados experimentais a partir do modelo que melhor se ajusta a esses dados, é um dos processos que permite suprimir alguns dos erros de medição e obter um modelo que permita levar a cabo o estudo das modificações estruturais de forma mais segura. Esta regeneração é feita a partir de modelos que representem razoavelmente as características modais, isto é, frequências naturais, factores de amortecimento e modos de vibração da estrutura. A obtenção destas características a partir dos dados obtidos experimentalmente é o objectivo da Identificação

Modal. O procedimento de melhoramento estrutural de modelos numéricos tende, em geral, a não modificar muito os valores iniciais das variáveis envolvidas, pelo que se compreende a necessidade crucial de se dispor de algoritmos eficientes de identificação modal em processos deste tipo.

Qualquer que seja o número de pontos de ligação entre subestruturas, estes têm sempre coordenadas de translação e de rotação, transmitindo em geral, no seu conjunto, tanto forças como momentos. Os métodos de melhoramento estrutural de modelos numéricos, para permitirem prever correctamente o comportamento da estrutura global, devem considerar as coordenadas de rotação. Os meios experimentais disponíveis não são usualmente tão adequados à medição de rotações como de translações. Assim, é geralmente mais fácil obter modelos suficientemente precisos quanto às coordenadas de translação do que quando estão envolvidas coordenadas de rotação. Esta limitação pode revelar-se crítica em grande parte dos casos de melhoramento estrutural de modelos numéricos, pois a não compatibilização das rotações e o equilíbrio dos momentos nas coordenadas de acoplamento das subestruturas pode, em alguns casos, falsear completamente as previsões do comportamento da estrutura global.

Este trabalho procura obter uma optimização dos meios disponíveis para resolver problemas de melhoria de modelos numéricos aplicados na dinâmica estrutural de forma a que estes sejam mais representativos da realidade. O resultado é colocar ao dispor do analista, ou projectista, de uma nova ferramenta de cálculo alternativa que possibilita o melhoramento de modelos de elementos finitos com base em respostas dinâmicas de referência, sejam estas experimentais ou numéricas.

## **1.2 Revisão Bibliográfica**

O melhoramento de modelos numéricos estruturais carece de estudos aprofundados em áreas como a modelação de juntas, utilização de algoritmos e de procedimentos de optimização, a identificação precisa e consistente dos parâmetros modais, a obtenção das matrizes completas de mobilidade incluindo os termos rotacionais, etc. Por outro lado, a modificação estrutural pode ser encarada, em termos matemáticos como um aspecto diferente do melhoramento dos parâmetros utilizados nos processos numéricos de projecto dinâmico de forma a que a resposta dinâmica obtida esteja em conformidade com a verificada experimentalmente, a partir dos protótipos. Resulta assim um processo

matematicamente análogo ao necessário para calcular quais as alterações à estrutura, ou a alguns dos seus parâmetros, necessárias para que o comportamento dinâmico da mesma se enquadre nos limites pretendidos.

### **1.2.1 O Método dos Elementos Finitos na Dinâmica Estrutural**

O método de elementos finitos é uma ferramenta amplamente usada em mecânica computacional e é particularmente útil para uma grande parte de problemas encontrados na engenharia e ciência aplicada. Várias pesquisas na quantificação de estimativas de erro de discretização têm gerado grande interesse. Estes, quando ligados com malha adaptável ou hierarquicamente refinada (Zienkiewicz e outros, 1983: 53-65 e Zienkiewicz e Zhu, 1987: 337-357), podem permitir o controle completo no erro de discretização. Porém, na fase de desenvolvimento presente, estas ferramentas estão apenas disponíveis no contexto da análise estática. Babuska e Rheinboldt (1978: 736-754) para o cálculo do erro inerente a estes métodos, usando os resíduos nas equações de equilíbrio. O cálculo deste erro com muita precisão é difícil de determinar numericamente: Zienkiewicz e Zhu (1987: 337-357) calculam o erro baseando-se nas tensões de elementos finitos; Ladeveze e Leguillon (1983: 485-509) propõem uma estimativa de erro baseado no conceito de erro a partir das equações de equilíbrio; Liszka e Orkisz (1980: 83-95) desenvolvem um método de diferença finito modificado (FDM) para controlar de uma maneira muito eficiente limites de domínio irregulares, podendo os métodos propostos na sua investigação serem utilizados para obter derivadas das variáveis cartesianas de campo precisas, que são úteis na estimação de erro de problemas de campo gerais (Fourment e Chenot 1995: 469-490). Tradicionalmente são utilizados dois procedimentos de refinamento de solução principais: ou o domínio é subdividido em elementos menores e reanalisados; ou é aumentado o grau de interpolação polinomial ao nível de elemento, que é depois reanalisado.

Usando elementos finitos, a resposta dinâmica linear transitória é calculada ou através da sobreposição modal, ou através de esquemas de integração directos. O método de integração directo é muito útil para resolver problemas não lineares. Procedimentos que descrevem o movimento no tempo (Zienkiewicz e Xie, 1991: 871-887; Zeng e outros, 1992: 555-571) e adaptação espacial da malha (Zeng e Wiberg, 1992: 315-332) são também usados. Porém, para problemas estruturais de maiores dimensões que envolvem variação temporal, o método de sobreposição é o mais vulgarmente utilizado. A precisão obtida pelo método de sobreposição depende da precisão dos modos ortogonais usados e a

própria representação espacial da distribuição de cargas é dependente no número de modos seleccionado para a análise modal. Poucos estudos têm sido feitos na estimação de erro de discretização sob carregamentos dinâmicos e utilizando esquemas de sobreposição modal. O Joo e Wilson (1988: 1319-1339) chegam a uma malha final usando vectores de Ritz como base de transformação. Na sua investigação, eles usam técnicas modais com factores de amplificação e obtêm estimativas de erro baseadas no critério de Babuska que usa modos de Ritz ampliados. Este procedimento é bastante incómodo e não dá uma medida do erro na resposta transiente em tempo real. Cook e Avrashi (1992: 619-626) discutem o procedimento para calcular o erro de discretização da modelação por elementos finitos, como a aplicação no cálculo da frequência natural de vibrações. Dutta e Ramakrishnan (1997: 135-158) propõem uma medida para a discretização de erros como uma extensão lógica do critério de erro de Zienkiewicz e Zhu (1987: 337-357), envolvendo a integração no tempo para considerar a variação de resposta com tempo. Usando esta medida de erro é proposta uma estratégia de refinamento de malha adaptável que permite um bom controlo dos erros de discretização na análise dinâmica transiente utilizando sobreposição modal. Chen e Ewins (2004), apresentam e separam os vários tipos de erro que ocorrem na modelação por elementos finitos, na dinâmica estrutural, e salientam a necessidade da verificação do modelo antes de se proceder a qualquer melhoramento, pelo que sugerem um procedimento para a sua verificação. Pascual, et al. 2005, introduzem um novo indicador para avaliar o problema de detecção de dano num modelo utilizando uma técnica de minimização de erro nas equações de equilíbrio.

### **1.2.2 Conceitos sobre Melhoramento de Modelos de Elementos finitos**

Um modelo matemático adequado de uma estrutura é essencial para avaliar as suas características dinâmicas. Um modelo matemático tanto pode ser obtido por uma aproximação analítica como através do método de elementos finitos ou ainda por uma aproximação experimental através de testes modais. Um modelo matemático apresenta fortes limitações na representação de estruturas complexas. Erros de discretização, de modelação de juntas, de condições fronteira, de não inclusão de amortecimento e outras simplificações assumidas no processo de modelação, podem ser as possíveis fontes de erro num modelo de elementos finitos (FE). Também na aproximação experimental, quando da extracção de resultados, podem ocorrer erros e omissões, devido ao número limitado de coordenadas medidas, à limitada gama de frequência e à dificuldade na medida de graus de

liberdade rotacional. A título de exemplo, o posicionamento incorrecto de um acelerómetro limita a qualidade dos resultados, reduzindo a precisão de medida da amplitude, eventualmente levando ao aparecimento de excesso de ruído. No entanto, os dados experimentais são geralmente considerados mais precisos dada a possibilidade de realização da aquisição de dados com equipamento de medida (Ewins, 2000; Maia e Silva 1998). Este facto conduziu ao desenvolvimento de técnicas de melhoramento dos modelos numéricos com o objectivo de reduzir as suas inexactidões através da utilização da imagem dos resultados medidos em testes dinâmicos. O modelo numérico de elementos finitos assim melhorado permite obter uma representação mais detalhada da estrutura a representar, o que não é tão bem conseguido experimentalmente. A técnica do melhoramento do modelo numérico pode assim ser vista, como uma tentativa para combinar os melhores aspectos das duas representações possíveis da estrutura a caracterizar.

O melhoramento de um modelo de elementos finitos consiste não só na escolha dos elementos mais apropriados e no seu refinamento, em zonas bem definidas, mas também a correcção de algumas das suas propriedades materiais e geométricas através dos resultados medidos em modelos ou protótipos de referência. A importância do melhoramento resulta do facto de que se o processo for executado com sucesso, o modelo numérico torna-se mais predictivo e, consequentemente. É fundamental que se compreendam as limitações e a aplicabilidade do método de melhoramento, para que a sua implementação possa ser possível. Da mesma forma a qualidade dos resultados dos modelos de elementos finitos melhorados também está condicionada pelos processos de experimentação que possuem limitações ligadas aos equipamentos utilizados e às metodologias de tratamento de dados durante a identificação modal. O próprio processo de identificação modal possibilita a ocorrência de erros vários. Estas e outras considerações mostram como a escolha e precisão dos dados relacionados com a identificação dos modos de vibração podem ser sensíveis nos cálculos de correlação usados no processo de melhoramento.

Outro aspecto que contribui para o melhoramento de modelos diz respeito à relação da identificação modal com a modificação estrutural que pode ser considerada biunívoca. Dito de outra forma, se por um lado a abordagem clássica da modificação estrutural por acoplamento de impedâncias recomenda a utilização dos modelos dinâmicos pré-identificados, por outro lado as técnicas utilizadas em modificação estrutural podem servir

como ferramentas nos processos de identificação modal. Vários são os autores que desenvolveram trabalhos de relevância nesta área (Imregun e Visser, 1991: 9-20; Berman e Nagy, 1983: 1168- 1173; Mottershead e Friswell, 1993: 347-375). No entanto é necessária uma abordagem resumida dos principais conceitos envolvidos a fim de que, mais facilmente, sejam compreendidas as estratégias consideradas durante o desenvolvimento das aplicações em estudo.

Para que o melhoramento de um modelo de elementos finitos seja conseguido com sucesso é necessário que no modelo inicial a melhorar, estejam incluídas as propriedades geométricas e materiais dos elementos finitos utilizados na representação da estrutura, mesmo que ainda de uma forma aproximada. Por exemplo deve-se verificar se a malha é suficientemente fina para assegurar que os modos de vibração fiquem suficientemente definidos ou se, nos testes experimentais, as ligações entre as partes de uma estrutura estão definidas em termos de flexibilidade. Não se pode melhorar um modelo que não represente a estrutura em análise com um mínimo de correcção. Torna-se assim necessário determinar quais os parâmetros que necessitam de ser corrigidos, ou de outra maneira identificar correctamente as regiões da estrutura de difícil, ou impossível, modelação. Também a selecção e a quantificação dos resultados a obter de forma que após o melhoramento haja informação suficiente do modelo experimental para o tratamento dos resultados é importante.

De uma forma geral os métodos de melhoramento de modelos podem ser classificados em dois tipos principais, os métodos directos e os indirectos. Nos métodos directos o melhoramento actua directamente sobre as matrizes do sistema, que são ajustadas directamente em função das correspondentes obtidas dos testes experimentais. Parte-se de um modelo analítico inicial que é melhorado, de forma que se tenham disponíveis as matrizes de massa e de rigidez e, por análise directa destas, as matrizes modais correspondentes e a matriz da função de resposta em frequência. Da mesma forma está disponível um número limitado de respostas e propriedades modais para o modelo experimental. No entanto, as matrizes do modelo experimental têm, normalmente, uma dimensão inferior às correspondentes ao modelo computacional. No processo de melhoramento do modelo as mudanças fazem-se a partir do modelo de elementos finitos inicial para que as suas propriedades modais sejam corrigidas a partir dos dados

experimentais ou dos obtidos a partir de um modelo de referência, geralmente mais detalhado mas com maiores custos computacionais.

Como consequência da diferença de dimensão das matrizes dos modelos computacionais e de referência, o problema fica muito subdeterminado, porque a probabilidade destas possuírem muitos mais elementos no modelo inicial a serem melhorados do que os obtidos nas medidas experimentais é grande. Consequentemente, há mais incógnitas que equações e o problema é indeterminado. No entanto, o número de parâmetros do modelo inicial que, realmente precisam de ser corrigidos, é consideravelmente menor que o número total de parâmetros necessários à completa descrição do modelo. Se for possível identificar quais os parâmetros que precisam de ser corrigidos, então o problema pode ser convertido num problema sobredeterminado, que é de solução mais simples. Mas pode-se pôr a questão de como escolher os parâmetros a melhorar. Isto só poderá acontecer se os erros no modelo inicial forem relativamente poucos e localizados em regiões da estrutura e não distribuídos ao longo de todos os elementos. Uma capacidade importante destes métodos é a de reproduzirem com rigor os dados medidos. Por isso, estes modelos dizem-se representativos. Porém, permanece a dificuldade de identificar os locais dos parâmetros que precisam ser corrigidos. As frequências naturais do modelo experimental podem ser medidas com precisão, mas os seus modos de vibração só podem ser obtidos com uma menor precisão com a tecnologia de medida corrente. A maior desvantagem destes métodos directos é que as matrizes de massa e rigidez melhoradas têm pouco significado físico e por isso não podem ser relacionadas com as alterações nos modelos de elementos finitos a melhorar. No entanto, existem vários algoritmos disponíveis para calcular o melhoramento de um modelo de elementos finitos preparado para cumprir o objectivo apresentado, a partir das propriedades dinâmicas medidas na estrutura de teste experimental. Alguns desses métodos podem ser encontrados na literatura: método de melhoramento directo da matriz (Direct Matrix Updating Method (DMU)) (He, J. 1987), ou o método da matriz de erro (Error Matrix Method (EMM)) (Lin, R.M. 1991) e os métodos baseados no multiplicador de Lagrange, tais como os propostos por Kabé (1985:1431-1436), que aplica estes métodos apenas ao melhoramento dos elementos não nulos da matriz de rigidez, ou por Smith e Beath (1991:119-126) que aplicam os métodos quasi-Newton no melhoramento da matriz de rigidez, considerando a conectividade estrutural dos elementos. Estes métodos geralmente não são iterativos pois compartilham as características em que as mudanças que eles



introduzem podem não ser fisicamente realizáveis. Utilizam valores novos nos elementos individuais no sistema de matrizes de massas **M** e de rigidez **K**, alguns dos quais podem ser aplicados a elementos que são inicialmente nulos. Baruch e Bar-Itzhack, (1978:346-351) e Baruch (1978:1208-1210), consideram a ortogonalidade em relação à matriz de massa para serem mais exactos. Berman (1979:927-928) e Buman e Nagy (1983:1168-1173), colocam algumas questões sobre a exactidão da matriz de massa uma vez que a análise de elementos finitos estática produz resultados mais precisos que a análise dinâmica. Baruch (1982:557-563, 1984:561-564) toma a matriz de massa analítica como referência e melhora a matriz de rigidez a partir dos dados modais medidos expandidos. Caesar (1986:394-401) e Wei (1989:562-567, 1990a:175-177, 1990b:1686-1688) sugerem outros métodos para melhoramento das matrizes de massa e de rigidez, produzindo novas equações de melhoramento das matrizes. Minas e Inmam (1988:583-587, 1990:84-92), ou Zimmerman e Widengren (1990:1670-1676) desenvolvem métodos utilizando a transferências de estruturas próprias a partir da teoria de controlo, método designado muitas vezes como ‘pole placement’. A principal dificuldade deste método é que necessita do vector próprio completo o que exige a expansão da forma do modo de vibração medido. Porque estes métodos requerem, em geral, vectores do modo de vibração completos são, do ponto de vista do cálculo, normalmente muito eficientes. Eles têm como objectivo a capacidade de reproduzir as propriedades modais medidas de  $m$  frequências naturais e modos de vibração. Conseguem conservar a conectividade dos elementos mas não garantem que o campo de frequências não incluído fique melhorado.

Quanto aos métodos indirectos de ajuste das propriedades físicas, as mudanças nessas propriedades ou nas propriedades dos elementos do modelo são feitas através de um ajuste que aproxime os modelos medido e projectado. Nestes métodos é mais aceitável que os parâmetros se possam ajustar para quantidades muito mais próximas das fisicamente realizáveis. Nas versões mais simples, um único factor de correcção pode ser aplicado à submatriz de rigidez elementar inteira para um elemento finito particular. Por outro lado estes métodos são geralmente iterativos e, como tal, computacionalmente mais exigentes, mas por outro lado podem ser aplicados a estruturas mais complexas e utilizar vectores de modo de vibração incompletos, ou seja utilizar os  $n$  GDL de um teste modal típico em lugar do modelo analítico completo composto pela totalidade dos  $N$  GDL que são requeridos pela maioria dos métodos directos.

Inicialmente, nestes métodos, a correlação era determinada por uma função de penalidade envolvendo o modo de vibração e os dados do vector próprio, normalmente utilizando a soma dos quadrados da diferença entre os valores próprios medidos e os estimados. Devido à natureza das funções de penalidade, a solução requer que o problema seja linearizado e otimizado de uma forma iterativa, com os parâmetros devidamente pesados. Se a variação nos parâmetros for pequena durante a convergência do processo iterativo, os resultados estimados podem servir para melhorar a qualidade do problema de valores e vectores próprios através do método de iteração no subespaço.

Um método iterativo baseado nos dados modais proposto por Collins et al. (1974: 185-190) é bastante utilizado devido à liberdade que permite até mesmo na escolha dos parâmetros de melhoramento e à sua aplicabilidade com dados incompletos. Chen e Garba (1980: 684-690) propõem usar uma técnica de perturbação de matriz para evitar resolução do problema de valores próprios e evitar avaliação de sensibilidades de valores próprios em cada iteração. Lin et al. (1995: 192-198) empregam dados modais analíticos e experimentais para avaliar coeficientes de sensibilidade com o objectivo de melhorar a convergência e alargar a aplicabilidade do método a casos onde existe um erro maior.

Para que o emparelhamento do sistema próprio seja realístico, é necessário que em ambos os sistemas, numérico e de referência, haja uma correcta correspondência entre modos e que não hajam omissões em qualquer dos modelos. No entanto, podem surgir outros problemas provocados pela diferença na distribuição de massa entre o modelo de elementos finitos e o experimental, podendo originar discrepâncias nas formas do modo de vibração e consequentemente uma falta de consistência no escalamento. Uma forma de reduzir este problema pode ser através da multiplicação da relação entre os modos em comparação pelo factor de escala modal, MSF (Maia, Silva et al. 1998:350-351), o que permite ainda evitar que os dois modos de vibração fiquem desfasados. No entanto, este factor é insuficiente quanto à indicação sobre a qualidade do ajuste dos modos.

A presença de amortecimento estrutural põe problemas adicionais. Como este não pode ser representado pelo amortecimento viscoso proporcional, os dados experimentais vão conter modos complexos. Os modos de vibração de um sistema amortecido são semelhantes aos modos de vibração de um modelo não amortecido, se o amortecimento for viscoso proporcional. A maior parte dos códigos FEM não incluem as características de

amortecimento, ou se as incluem, os modelos utilizados são complexos ou pouco precisos. Assim a comparação dos dados numéricos, derivados do modelo sem amortecimento e dos dados experimentais provenientes da estrutura com características de amortecimento desconhecidas é problemática. O procedimento usual é criar modos reais a partir dos modos experimentais complexos identificados ou usar testes de ressonância de fase. Esquemas de melhoramento usando dados modais têm geralmente melhorado modelos de elementos finitos não amortecidos, ou seja os modos complexos medidos devem ser aproximados pelos modos reais equivalentes. De facto uma estrutura apresenta na prática modos complexos sob condições de esforço normal. A única excepção é o teste de ressonância de fase (Cooper e outros, 1992), muitas vezes referido como o teste do modo normal, onde um grande número de excitadores é usado com o objectivo de apenas um modo da estrutura ser excitado. O teste de ressonância de fase é demorado, caro e difícil. É apenas usado quando é necessária uma precisão extrema dos modos de vibração. Sistemas contínuos com mecanismos de amortecimento diferentes também apresentam modos complexos, e os métodos descritos para produzir modos reais podem ser aplicados a estes casos.

O método mais utilizado para obter os modos de vibração a partir dos valores complexos é o que multiplica o módulo de cada elemento do vector modo de vibração complexo pelo sinal do co-seno do seu ângulo de fase. Assim o elemento do vector modo de vibração real é positivo se o ângulo de fase do elemento do modo de vibração complexa correspondente estiver entre  $-90^\circ$  e  $90^\circ$ . De outra forma o elemento do modo de vibração real é negativo. Esta técnica funciona bem em estruturas levemente amortecidas, quando o ângulo de fase está próximo de  $0^\circ$  ou de  $180^\circ$ . Outros métodos têm sido apresentados para obter os modos reais, tais como o de Ibrahim (1983:446-451) e Niedbal (1984:292-295), mas que apenas são válidos para sistemas com amortecimento não muito elevado e sendo ainda sensíveis à falta de modos identificados. Nos exemplos analisados neste trabalho é considerado que as estruturas são levemente amortecidas pelo que se admite suficiente a utilização do método mais simples. Se na análise de elementos finitos o amortecimento não for considerado, então é recomendável utilizar o quadrado das frequências naturais envolvidas e os modos reais que podem ser estimados a partir dos modos complexos medidos.

Em vez dos valores próprios complexos, pode-se incluir a razão de amortecimento e as frequências naturais. Vários tipos de algoritmos de melhoramento têm sido desenvolvidos e quase todos requerem o cálculo da sensibilidade em relação aos parâmetros desconhecidos da razão de amortecimento, da frequência natural e dos modos de vibração complexos (Friswell e Mottershead, 1995:159-161). Estes métodos têm limitações, mas ainda assim podem interagir bem com os modelos de elementos finitos e com as medidas experimentais, desde que sejam pequenas as variações calculadas para os parâmetros desconhecidos.

Um método conhecido por “Eigendynamic Constraint Method” (ECM) (Ewins, 2000:456-458) utiliza factores de correcção para os elementos individuais das matrizes de massa e de rigidez, que são calculados com o fim de modificar o modelo a melhorar. Este método, que tem várias variantes, necessita que se utilizem todos os modos, o que implica, normalmente, a necessidade de se aplicar um procedimento de expansão dos modos medidos experimentalmente, tarefa que não só é problemática mas também de validade duvidosa.

Os métodos que utilizam a função de penalidade usam geralmente séries de Taylor truncadas expandindo os dados modais aos primeiros dois termos, em relação aos parâmetros desconhecidos, para se obter uma aproximação linear. Estes métodos utilizam uma matriz de sensibilidade com as primeiras derivadas dos valores próprios e dos modos de vibração calculadas em relação aos parâmetros variáveis. Os parâmetros melhorados podem ser obtidos por minimização da função de penalidade ou através das soluções gerais da mesma função. Como para as frequências mais elevadas a precisão das medidas é menor; estas funções são pesadas antes de se iniciar o processo. Uma vez que os parâmetros podem ter dimensões muito diferentes, estes são normalizados e depois afectados de pesos de acordo com a sua sensibilidade ao melhoramento (Friswell e Mottershead, 1995:161-180).

Os métodos que utilizam a inversa da sensibilidade dos valores e vectores próprios, Inverse Eigensensitivity Methods (IES), são semelhantes aos métodos que utilizam funções de penalidade. Nestes métodos parte-se do princípio que as diferenças entre as propriedades modais medidas e as projectadas, isto é, as frequências naturais e modos de vibração, podem ser descritas em termos das sensibilidades modais relevantes. Estas são

dadas pelas razões de variação de frequências naturais em relação às mudanças na massa individual, termos de rigidez e pequenos ajustamentos na massa e elementos de rigidez seleccionados no modelo. Estão incluídas as propriedades de sensibilidade do modelo analítico inicial, dado que estão disponíveis as soluções próprias daquele modelo, junto com as discrepâncias observadas entre as várias propriedades modais projectadas e medidas e estas estão disponíveis depois de realizado um teste modal na estrutura de teste. Como o método está baseado apenas nas sensibilidades do valor próprio, por simplificação, esta aproximação limita severamente a aplicabilidade do método devido ao número bastante pequeno de dados experimentais que para eles podem contribuir, pois apenas se usam as frequências naturais. Para minimizar este problema aumentam-se duas ou três vezes as equações envolvidas em relação ao número de parâmetros desconhecidos, antes de aplicar o cálculo.

Estes métodos indirectos, não requerem dados completos do vector próprio e podem funcionar até mesmo quando só estiver disponível um número limitado de GDL. Isto dá a esta aproximação uma vantagem significativa sobre os métodos directos. Porém, por causa da aproximação inerente à parte inicial da formulação e do estado incompleto inevitável dos dados modais, a solução numérica não é única em relação ao problema físico e deve ser repetida iterativamente para se procurar uma solução estável de valor realista (Ewins, 2000:458-462).

Os Métodos da variância mínima têm as suas raízes na previsão de Bayes, mas as iterações no modelo de melhoramento são funções não lineares dos parâmetros do modelo modal. Podem ser considerados como métodos de função de penalidade visto que uma mudança na matriz de pesos, neste caso particular, forma uma iteração em relação à próxima. A abordagem estatística está relacionada com a forma racional de pesar os dados medidos experimentalmente e os obtidos teoricamente. Estes métodos proporcionam ainda uma medida da qualidade dos parâmetros melhorados através de uma estimativa de variância. Assumem que ambos os dados medidos e as estimativas iniciais dos parâmetros têm erros que podem ser expressos em termos de matrizes de variância. Os parâmetros melhorados correspondem aos que tiverem a variância mínima. A matriz de correlação, calculada entre as medidas e as estimativas de melhoria dos parâmetros em cada iteração, é utilizada para calcular a próxima estimativa do vector de parâmetros e o processo repete-se até se obter a mínima variância dos parâmetros melhorados. Estes métodos envolvem

normalmente um número significativo de iterações, o que dificulta a sua aplicação (Friswell e Mottershead, 1995:180-201).

Os métodos de função de resposta (Response Function Methods (RFM)) optimizam a função de penalidade utilizando directamente os dados medidos das FRF. A vantagem desta metodologia é evitar as dificuldades na aplicação de quaisquer dos métodos de melhoramento anteriores, em que os dados medidos não são suficientes para permitir que a equação de melhoramento seja tratada como um problema sobredeterminado, sendo ainda possível incluir o amortecimento. É difícil medir um número elevado de GDL e também é complicado obter as propriedades modais se a sua densidade for elevada, num campo relativamente pequeno de utilização, a baixas frequências. Estes métodos baseiam-se na minimização de funções de erros, normalmente designados de resíduos de entrada ou resíduos de saída, a partir das quais são definidas as equações de aproximação, baseadas na equação de movimento, a minimizar (Friswell e Mottershead, 1995:228-253). As maiores dificuldades destes métodos residem na possibilidade de enviesamento da estimativa dos parâmetros, provocado pelo ruído dos dados medidos que podem mascarar a informação, e na necessidade de reduzir o modelo. Porém, se nem todos os GDL forem medidos, como há muitos mais ‘pontos’ de dados de resposta que de dados modais os dados de resposta são, em princípio, mais fiáveis ao desenvolvimento da estrutura de teste. Existem muitos defensores desta metodologia, como é o caso de Lin e Ewins (1994:437-458) e de Verboven et al. (2005:675-699). No entanto, a utilização directa das curvas de transferência medidas em processos de alteração de parâmetros pode facilmente levar à propagação catastrófica dos erros devido ao ruído de medição, principalmente por ser necessária a inversão de matrizes. Tal facto leva a que seja recomendável a identificação prévia das curvas a considerar, de modo que se possam utilizar curvas regeneradas a partir de parâmetros identificados, teoricamente puras e, consequentemente, livres de ruído.

Um método de melhoramento do modelo numérico através de um problema de optimização não linear constrangido é proposto por Modak e outros (2000: 543-551). Existem também tentativas de usar os resultados da FRF medidos directamente para identificar as matrizes de sistema (Fritzen, 1986: 9-17) e para melhorar o modelo (Lin e Ewins, 1990: 141-162). Recentemente, foram empregues algoritmos genéticos para melhoramento modelo (Levin e Lieven, 1998: 91-120; Zimmerman e Hasselman, 1999: 609-625). A Selecção de variáveis a serem melhoradas é muito importante no

melhoramento de modelos de elementos finitos, com o objectivo final de minimizar a presença de erro de modelação no modelo. Matrizes de elementos genéricos que dão origem a uma escolha de parâmetros que permitem mudanças na estrutura das matrizes de massa e de rigidez modificando os valores próprios e vectores próprios de elementos finitos individuais são apresentadas por Gladwell e Ahmadian (1996: 601-614). A formulação de elementos genéricos é aplicada ao problema de identificação de ligações por Ratcliffe e Lieven (2000: 3-28) enquanto que Mottershead et al. (1996: 171-182) propõe uma estratégia para a parameterização de uma junta soldada e uma fixação final. Chu e Trethewey (1998: 335-353) usam um modelo de elementos finitos melhorado experimentalmente por avaliar os efeitos de mudanças de projecto.

Mas um método de melhoramento de modelos de elementos finitos precisa também de ser investigado no que respeita à sua capacidade de avaliar, com precisão aceitável, as mudanças nas características dinâmicas de uma estrutura devido a modificações estruturais potenciais. Poucas publicações existem sobre este tema que constitui um dos assuntos a desenvolver no presente trabalho. Alguns autores utilizam os resultados experimentais em termos dos valores e vectores próprios e outros centraram o seu interesse directamente nos resultados das funções de resposta em frequência. Ambas as metodologias apresentam vantagens e inconvenientes que esses autores tentam aproveitar. Modak et al. (2000: 543-551) consideram no melhoramento de modelos duas modificações estruturais, uma através de uma massa pontual e outra através da utilização de uma viga. Esta metodologia é demonstrada através da aplicação do melhoramento do modelo de elementos finitos a uma estrutura em forma de F usando resultados modais medidos, empregando um método de melhoramento de modelo baseado na optimização constrangida. Os resultados são posteriormente utilizados para prever os efeitos de modificações estruturais. Modak (2002: 303-322) volta a usar técnicas de melhoramento de um modelo de elemento finito da mesma estrutura com um modelo melhorado para reproduzir a dinâmica da estrutura com mais precisão. O mesmo autor em (2005: 943-964) continua o trabalho anterior, mas agora os modelos melhorados são obtidos comparando o método de melhoramento proposto baseado em optimização constrangida com um método iterativo de melhoramento de modelo baseado nos dados modais. Segundo o autor, os resultados obtidos com base no modelo melhorado pelo método proposto em relação aos estudos experimentais são melhores que os obtidos com base no modelo melhorado através do método iterativo. Steenackers (2006: 919-934) concentra-se também num método de melhoramento baseado

em dados modais medidos e alarga as técnicas convencionais de melhoramento de modelos de elementos finitos adaptando-as para levar em conta a incerteza nos parâmetros modais estimados a serem melhorados. É testada a efectividade do procedimento sugerido num estudo de caso. É que, segundo o autor, a suposição total dos resultados obtidos experimentalmente não é completamente conseguida. Quando se obtêm medidas experimentais e calculam as características dinâmicas de uma forma repetitiva, há sempre incerteza na medida e no cálculo das características de ressonância que podem ser caracterizadas através do seu valor médio e do desvio padrão. Uma vez identificadas as propriedades estatísticas estas podem ser implementadas no processo de melhoramento de elementos finitos tendo em conta as incertezas de medida. Farrar et al. (2004: 26-29), discutem a avaliação das frequências de ressonância para a resposta modal de placas compostas laminadas. São usados métodos estatísticos e comparadas medidas de teste a predições, e também são listadas estatísticas de variabilidade experimental e correlação de teste-análise. Zang et al. (2005: 315-326) aplicam uma aproximação de projecto à dinâmica de um amortecedor ajustável de vibração devido a incerteza de parâmetros. O objectivo é minimizar os deslocamentos do sistema principal numa grande gama de frequências de excitação, apesar da incerteza nas propriedades de massa e de rigidez do sistema principal. Shin e Cho (2005: 129-140) descrevem o problema de produção de pastilhas de silicone em bruto onde existem problemas de manutenção das dimensões das peças, da qualidade de superfície e da tolerância geométrica do alojamento.

Wu e Li (2006: 232-239), desenvolvem um procedimento de melhoramento do modelo de elementos finitos em duas fases. Baseiam-se na análise de sensibilidade dos parâmetros em relação aos vectores próprios para identificação de parâmetros estruturais e detecção de dano numa estrutura de aço, a partir das medidas experimentais de vibração. Primeiro são adoptados o método dos mínimos quadrados e a estimação de Bayes para a identificação da rigidez das juntas de ligação e o módulo de Young da estrutura. Depois, através do procedimento de melhoramento do modelo de elementos finitos é utilizado para a detecção de dano de vários componentes da estrutura com diferentes modelos e compara os resultados do modelo de FE melhorado e os dados experimentais. É mostrado que o modelo de melhoramento de FE baseado na análise de sensibilidade dos parâmetros em relação aos vectores próprios, é uma ferramenta efectiva para identificação de parâmetros estruturais e detecção de dano em estruturas de vigas de aço. Sinha et al. (2006:232-237), desenvolvem um modelo de elementos finitos validado pelos métodos de melhoramento



em conjugação com os resultados modais experimentais, para poder ser usado para qualificação de componentes de centrais nucleares. O método de melhoramento utilizado é baseado na análise de sensibilidade por gradiente utilizando os dados modais experimentais, proposto por Sinha e Friswell (2003). Mares et al. (2006: 1674-1695), admitem a possibilidade de haver variabilidade em estruturas de teste aparentemente idênticas incluindo incertezas no modelo de elementos finitos provocadas por essa variabilidade. Esta pode acontecer devido a muitas fontes que incluem tolerâncias geométricas e do processo de fabrico, e incertezas de modelação por insuficiente definição das propriedades materiais nominais, da rigidez de juntas e condições de limite consideradas, indevidamente, rígidas. Estes autores utilizaram a teoria estocástica de melhoramento de modelos usando um procedimento inverso de Monte-Carlo com conjuntos de múltiplos de resultados experimentais. Aplicaram o seu método a uma estrutura de referência usando um modelo de elementos finitos de contacto incluindo incertezas comuns na modelação das soldaduras por pontos. Jaishi e Ren (2007), propõem a utilização de uma técnica de optimização multi-objectivo, (Goal Attainment Method) de Gembicki (1994), para obter os extremos de duas funções objectivo simultaneamente superando a dificuldade de pesar a função objectivo individual de mais objectivos num procedimento convencional de melhoramento do modelo de elementos finitos. Os resíduos das frequências próprias e a energia de tensão residual modal são usados como duas funções objectivo na optimização multi-objectivo. O método é aplicado a uma viga simplesmente apoiada e a um viga em caixão contínua de uma ponte pré-fabricada que também é testada em condições operacionais.

Outros autores usaram os dados medidos directamente da função de resposta em frequência para melhorar o modelo numérico, como é o caso de Lin e Ewins, (1990: 141-162). Mais tarde Lin e Ewins (1994: 437-458) desenvolveram uma formulação de melhoramento de modelos utilizando directamente a função de resposta em frequência e apresentaram exemplos de aplicação com resultados expostos graficamente tanto em modelos onde se utiliza o conjunto total de resultados, em todas as coordenadas medidas, como com conjuntos incompletos. Os autores referem a vantagem do seu método relativamente aos que utilizam a informação modal, mas a obtenção dos resultados numéricos em termos de FRF não é clara. Imregun et al. (1995: 187-202; 1995: 203- 213), conduziram também vários estudos usando dados simulados e experimentais para medir a efectividade desta técnica iterativa baseada na função de resposta em frequência. Modak

(2002: 447-467) continua o trabalho anterior, mas agora os modelos melhorados foram obtidos por um método directo de melhoramento modelo, e por um método iterativo de melhoramento de modelo baseado nos dados da função resposta em frequência (FRF). O modelo de elementos finitos melhorado é aplicado de novo numa estrutura em forma de F e são comparados resultados obtidos novamente pelo método directo e pelo método baseado na FRF. Modak conclui que os resultados obtidos com o modelo melhorado são razoavelmente precisos excepto na gama mais alta de frequência, e conclui ainda que é provável que os modelos melhorados sejam fisicamente mais próximos da estrutura e representem melhor os efeitos de modificação estrutural. Cunha e Ambrósio (1997), aplicaram técnicas de melhoramento de modelos de elementos finitos a estruturas de veículos ferroviários, obtendo modelos de carruagens “em branco” com frequências naturais e modos de vibração semelhantes aos identificados experimentalmente.

Na última década, a tecnologia de melhoramento foi também introduzida em modelos estruturais de engenharia civil. Zivanovic et al. (2007), divide o processo de melhoramento em quatro fases: modelação de FE inicial; teste modal; afinação manual do modelo; e, melhoramento automático, usando um software especialmente desenvolvido para o efeito, designado por FEMtools. Este autor aplica o procedimento ao estudo de uma viga mestra em caixão de aço de uma ponte pedestre existente. Para isso introduz um ajustamento manual inicial por tentativas no modelo FE para reduzir os erros iniciais de frequência de 30% para apenas 4%. Demonstrou de seguida que só então o modelo de FE pôde ser melhorado automaticamente com sucesso. Kanev e tal. (2007), através de um método simplificado, validam uma aproximação para detecção e localização de dano baseado no melhoramento do modelo de elementos finitos. A aproximação tem a vantagem sobre outros métodos existentes pois melhora simultaneamente as três matrizes de elementos finitos do modelo preservando a sua topologia mantendo as simetrias e positivas definidas. Esta metodologia, com um algoritmo novo, é testada num modelo que utiliza um cabo de aço onde são introduzidas mudanças de massa locais e mudanças globais na tensão do cabo. Cottin (2006: 65-77) aplica o princípio que os modelos analíticos de sistemas elasto-mecânicos lineares podem ser melhorados através da estimação de parâmetros do modelo, desde que a estrutura das equações e a parametrização do modelo discretizado seja consistente com o sistema em teste. Apesar da diferença entre o número de graus de liberdade do modelo analítico e dos medidos experimentalmente, este método apenas necessita de um conjunto mínimo de dados de teste, que é determinado para estimar os

valores dos parâmetros do modelo em análise. Carvalho (2006:839-864) escolhe alguns valores próprios problemáticos de um modelo de elementos finitos simétrico de tal modo que o modelo melhorado permaneça simétrico e o restante grande número de valores próprios e vectores próprios do modelo original permanecem inalterados. O problema surge naturalmente na estabilização de um novo sistema de grande dimensão ou em sistemas existentes cujas vibrações perigosas têm de ser suprimidas.

Nos métodos apresentados o amortecimento é normalmente ignorado, no entanto nem sempre isso é possível. Quando o amortecimento representa uma contribuição estrutural importante, é preciso tê-lo em conta no melhoramento. Lin e Zhu (2006:220-2218), apresentam uma aplicação do método da função resposta em frequência, desenvolvido para identificar matrizes de amortecimento de sistemas estruturais, bem como as matrizes de massa e de rigidez. São usadas formulações de melhoramento para identificar coeficientes de amortecimento tanto para os casos de amortecimento proporcional como não proporcional. O método foi aplicado através de simulações numéricas baseadas numa estrutura referida em Lin e Ewings (1994:437-458) com amortecimento estrutural e obtidos os erros de precisão de melhoramento na modelação das matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento.

### **1.2.3 Desenvolvimento na Modelação de Ligações**

A ligação numa estrutura, modelada por elementos finitos exemplifica onde podem surgir erros provocados pela formulação inadequada em relação aos esforços envolvidos. É assumido que junto de cada ligação o modelo de distribuição de tensão é incerto, o que conduz a um erro estrutural no modelo. O Ibrahim e Pettit (2005: 857-936) numa tentativa de melhor modelar uma estrutura consideram as condições de rigidez locais devidas à pré carga. Segundo estes autores, para reduzir estes erros estruturais deve ser mudada a função de forma assumida dos elementos e isto não pode ser feito apenas modificando os parâmetros variáveis. Podem ser incorporados parâmetros adicionais na formulação de elementos finitos afectando os desenvolvimentos negligenciados no modelo de base inicial. Podem ser também usados elementos mais avançados, por exemplo substituir os elementos de viga Euler-Bernoulli por elementos de viga Timoshenko para incluir um parâmetro que modele a tensão de corte. Como exemplo de demonstração é utilizada uma viga rígida compensada que se assume ser rígida numa porção da viga perto de uma junta. Mottershead et al. (2000: 923-944), usam compensações rígidas para melhorar uma

estrutura articulada espacial de alumínio, e Horton et al. (1999: 1556-1562) demonstram os seus benefícios nos parâmetros variáveis de projecto no melhoramento de juntas soldadas. Num outro caso a compensação resultante é negativa, implicando que a junta seja muito mais flexível que o modelo de base inicial. Ratcliffe et al. (2000: 3-28) aplicam a aproximação de elemento genérica para identificação da junta usando dados da função de resposta em frequência. O número de parâmetros genéricos está limitado, obrigando à simetria de elemento e prevenindo o acoplamento ou desacoplamento dos modos. É utilizado um amortecimento proporcional e o modelo melhorado mostra melhoria significativa em exemplos simulados e experimentais. Titurus et al. (2003: 2273-2286) usam os primeiros dois valores próprios de um sub estrutura de junta em T como parâmetros para melhorar um modelo duma estrutura soldada obtendo uma boa correlação de frequências naturais e modos de vibração. Friswell et al. (1998: 41-50) usam elementos genéricos para melhorar os modelos dinâmicos de tacos de golfe. O cabo do taco é modelado usando um elemento de viga genérico. Wu e Lei (2004: 1381-1399; 2004: 1401-1419) realçam a diferença entre parâmetro e erros estruturais. Um modelo é definido como contendo erros estruturais e necessita de os incorporar durante o melhoramento. Foi realçado que a modificação dos parâmetros físicos não pode corrigir estes erros se as funções de forma assumidas não mudarem. Os parâmetros genéricos são melhorados usando um método de sensibilidade, em vez da frequência ou da sensibilidade da forma do modo de vibração. O melhoramento conduz a uma boa correcção dos erros estruturais. Law et al. (2001: 19-39) modelam e melhoram uma estrutura articulada espacial de aço. Elementos genéricos são ligados através de modelos de junta de mola semi-rígidos e são melhorados simultaneamente, melhorando no processo a correlação da frequência e do modo de vibração com os dados de teste. Também são aplicados elementos genéricos ao domínio de detecção de dano. Titurus et al. (2003: 2273-2286) aplicam a aproximação de elemento genérico para sub estruturas para melhorar modelos de juntas, sendo usada uma selecção de subconjuntos para reduzir o número de parâmetros.

Terrell et al. (2007), desenvolvem elementos genéricos que surgem de transformações de sub estruturas para correcção de parâmetros que podem aumentar a sua gama como parâmetros candidatos e permitir corrigir erros estruturais. O método assume que os valores próprios da sub estrutura são os parâmetros usados no procedimento de melhoramento global e que a matriz de vectores próprios da sub estrutura é otimizada

para obrigar a conectividade dos constrangimentos. O método é demonstrado num teste com uma estrutura simples em forma de L onde a sub-estrutura é o canto.

#### 1.2.4 O caso Particular das Ligações Rebitadas

Juntas rebitadas são usadas na fuselagem de aeronaves para unir secções de parede exterior de grandes dimensões. No processo de rebiteamento, é formada uma cabeça num dos lados do rebite e na face oposta é deformada lateralmente expandindo-se para encher o furo de alojamento, ficando as peças unidas. Quando as juntas rebitadas são sujeitas a cargas cíclicas em serviço, o efeito de concentração de tensão pode produzir uma fenda de fadiga e conduzir a falhas por rotura à fadiga, embora com tensões no domínio elástico do material.

Estudos sobre o desenvolvimento de fadiga de juntas rebitadas têm sido feitos, principalmente em investigações associadas directamente ou indirectamente com aeronaves. Normalmente são executados testes experimentais em sobreposições simples ou juntas de topo a topo, feitas com ligas de alumínio em chapa unidas por rebites, e carregamentos com tensão cíclica. Muito do trabalho experimental foi empreendido pelo “National Advisory Committee for Aeronautics” (NACA) (Holt, 1950; Howard e Smith: 1952) e ainda por outros autores (Heywood, 1962: 230- 242; Frost e outros, 1974: 375-379). Porém, nenhuma análise numérica foi executada em quaisquer das investigações mencionadas, baseando-se os estudos na investigação de curvas S-N de resistência à fadiga para os modelos particulares testados. Com o desenvolvimento dos computadores, foi possível explorar este campo usando o método de elemento finito para simular situações reais (Ekvall 1986: 172-189). Ekvall desenvolve um modelo de elementos finitos simples para a análise de tensão de uma junta e determina as tensões e extensões locais críticas na junta sobreposta rebitada ou na zona afectada da junta. São feitas predições de vida à fadiga baseadas nas tensões locais para o ponto crítico, usando a lei de tensão-vida efectiva e são comparadas a vida à fadiga prevista com a vida experimental. No modelo de elementos finitos simples desenvolvido, os rebites são modelados por três molas constantes que correspondem respectivamente à rigidez devida a uma carga axial, a uma carga de corte e um momento flector aplicados no rebite. O contacto entre o rebite e as placas é ignorado.

Análises de fadiga numéricas e experimentais de funcionalidade dos furos com ajuste de folga e de interferência em relação aos fixadores são feitas pelo Rich e Impellizzeri (1977: 153-175). As amplitudes de extensão equivalentes são calculadas a partir de uma equação desenvolvida pelos autores e estudam a deformação de amplitude-vida e de constante-amplitude dos modelos e determinaram a vida à fadiga. Swenson et al. (1992: 449-459) desenvolvem um modelo de elementos finitos para simular o crescimento de fenda de sobreposição nas juntas do tensor numa asa de aeronave onde o carregamento primário é paralelo à junta. No modelo estudado, cada camada da junta rebitada é representada por uma malha separada de elementos finitos bidimensional sendo as camadas ligadas por elementos de rebite que são modelados como molas.

Fung e Smart (1994: 79-90) examinam as juntas rebitadas simples sobrepostas numa fila de ligações rebitadas, tanto numericamente como experimentalmente. Os mesmos autores analisam as extremidades de rebites aplicados em juntas sobrepostas simples com uma ou duas fileiras de rebites usando elementos finitos sólidos elasto-plásticos e realizam testes de fadiga (1997:13-27). Fazem um estudo paramétrico numérico, onde as juntas são sujeitas a uma carga cíclica alternada sendo consideradas a plasticidade e a geometria não linear. São apresentadas as tensões à volta do furo do rebite e as formas deformadas das juntas e ainda adicionalmente (1997: 123-128) os efeitos de variação da força de fixação, o ajuste de interferência do rebite, o coeficiente de fricção e a geometria das juntas quando estas são sujeitadas a várias histórias carregamento. O inconveniente deste modelo apresentado reside na sua complexidade que dificulta a sua aplicação industrial.

Os materiais compostos têm sido extensamente usados em estruturas de base de aviões, navios, automóveis e vários tipos de indústrias, sob a forma de composto laminado devido à sua alta resistência específica, rigidez e resistência de corrosão. Os rebites de cabeça embutida são frequentemente usados para ligar placas deste tipo. Quando o laminado é ligado pelos rebites, o desenvolvimento à volta da junta é bastante complicado. A fraqueza da ligação normalmente resulta na ruína total da estrutura. Um dos poucos estudos que investiga ligações por rebites por análise tridimensional de elementos finitos é Marshall et al. (1989: 133-151). Porém, além da tensão planar, o varejamento causado pela compressão planar é de grande importância. Então, a análise tridimensional é imperativa porque a resistência inter-laminar tem grande influência no desenvolvimento. Lee e Lin (1989: 173-188; 1989:133-148), Lin e Kuo, (1989:536-553), analisam o desenvolvimento

de resistência de placas compósito com furos sob a acção de varejamento. Wang e Han (1988: 124-135) realizam análises no desenvolvimento de placas unidas por vários rebites sob a acção de varejamento. Nestes estudos, os rebites são só modelados como nós elásticos em vez de um corpo elástico. Porém, estes estudos demonstraram que a falha aparece à volta do rebite. Desta forma, modelar o rebite com molas elásticas lineares não é suficiente para modificar o desenvolvimento à sua volta.

Langrand et al. (2000:121-138) estudam a capacidade ao choque de estruturas rebitadas de aeronave. Utilizando um procedimento numérico baseado na modelação de elementos finitos propõem modelos e caracterizam assim a forma de falha do material, com o objectivo de limitar os custos dos procedimentos experimentais. Utilizam modelos sólidos 3D nos rebites e elementos de casca nas placas, todos com densidades de malha elevadas. Em paralelo são apresentadas experiências quase estáticas e dinâmicas feitas em tensão elementar, punçonnement e corte sobre peças rebitadas. Não se identifica qualquer sensibilidade de taxa de extensão no desenvolvimento da falha das juntas rebitadas montadas. São usados dados experimentais utilizando um método inverso para identificar os parâmetros de dano de Gurson (1977: 2-15) de cada material.

Lee et al. (2001: 902-920), utilizam uma aproximação numérica para investigar o desenvolvimento após varejamento de uma placa ligada por rebites. Para reduzir o tempo de cálculo, os rebites são substituídos por molas, é induzida a rigidez das molas e analisado o desenvolvimento por dobragem e a interacção entre o rebite e o laminado. É usado o software de elementos finitos ABAQUS para inspeccionar o desenvolvimento após varejamento de placas de compósito ligadas por rebites. Vários parâmetros são considerados como a sucessão de empilhamentos, o arranjo dos rebites, e o espaço entre os ligadores. Em todos estes casos, as molas representam completamente o desenvolvimento à volta dos rebites.

### **1.2.5 O Caso Particular das Ligações Aparafusadas**

Ligações roscadas são o método mais comum de ligar componentes mecânicos. Estudos de transferência de carga e tensão de roscas sujeitas a cargas axiais e flexão são processos complexos, especialmente quando não é envolvida nenhuma carga simétrica. As ligações roscadas são em primeiro lugar usadas em montagens estruturais com cargas axiais e em componentes de recipiente de pressão. A forma da rosca, a espessura da parede

que apoia a rosca, o passo das roscas, número de roscas, etc., afecta a distribuição de carga entre eles assim como induz concentração de tensões nas raízes dos filetes da rosca. A influência destes parâmetros tem sido investigada através de métodos de elementos finitos.

Uma ligação por parafuso-porca representa um problema de contacto com fricção. Se a adesão for elevada o atrito é suficiente para impedir qualquer deslizamento sendo o contacto entre ambos elementos considerado firme. Para alcançar uma ligação firme entre as superfícies de contacto das partes atarraxadas, os parafusos têm que ser pre-tencionados. Neste caso, juntas de parafusos representam um problema de contacto com as superfícies de deslizamento/aderência.

A dinâmica de estruturas montadas por juntas roscadas é influenciada pela transferência não linear das ligações. A utilização de juntas com parafusos assim, como as rebitadas são a fonte primária de amortecimento e o seu estudo é muito importante para a fase de projecto de juntas roscadas. A resposta dinâmica destas montagens pode ser investigada numericamente ou por métodos híbridos onde são incluídos dados experimentais. Uma extensa bibliografia é apresentada por Mackerle, (1999:677-748 ). Ju, (1997:129-141) analisa os factores de intensidade tensão da junta aparafusada com uma fenda simples e dupla. Faz uma análise de elementos finitos no contacto não linear e inclui variações no atrito, folga, força aplicada e ângulo de fenda. As simulações numéricas são executadas em estado plano de tensão, usando elementos quadriláteros isoparamétricos de oito nós e triangulares de seis nós. O modelo utilizado na aplicação dos elementos finitos é uma placa rectangular. Uma malha fina é utilizada entre a superfície de contacto e a falha para obter uma solução precisa. Tserpes (2001: 663-675) desenvolve um modelo de dano progressivo tridimensional para simular a acumulação de dano e calcular a rigidez residual e modo de falha final de juntas compostas aparafusadas sob a acção de um carregando elástico planar dando ênfase à análise em geometria tridimensional executada numericamente com o código de elementos finitos ANSYS. O modelo de FE usa a geometria 3-D para modelação da junta aparafusada que é preparada da forma proposta por Ireman (1999: 195-216). Na modelação da placa composta é usado o elemento 3-D de oito nós. Uma placa metálica e um parafuso são modelados usando um elemento sólido 3-D com três graus de liberdade de deslocamentos por nó. Trabalhos semelhantes são ainda propostos por Hung e Chang, (1996: 1359-1400), Jong, (1977: 313-31), Wong e Matthews (1981:481-491) e Camanho e Matthews (1999: 906-27).



Pai e Hess (2002: 585-602), apresentam um estudo sobre o desprendimento de ligações aparafusadas sujeitas a cargas de corte dinâmicas. São apresentados quatro processos diferentes de alívio de um parafuso debaixo de condições diferentes de deslize da cabeça e são identificadas regiões de contacto. É desenvolvido um modelo de elementos finitos tridimensional e é utilizado com uma malha fina para validação e estudo dos processos identificados de desprendimento.

Não tem havido particular atenção à representação de juntas entre componentes diferentes com elementos finitos e consequentemente não se encontram referências sobre estudos que envolvam o melhoramento de elementos finitos aplicados a este meio de ligação. A maioria das investigações realizadas incide sobre a junta aparafusada entre acoplamentos ou falanges (Song et al. 2004: 249-276; Ibrahim e Pettit, 2005: 857-936; Oldfield et al., 2005). Os mesmos autores referem que o desenvolvimento de juntas sob cargas dinâmicas é especialmente interessante porque o atrito nas superfícies dá origem a dissipação de energia. O atrito tem efeito sobre os movimentos oscilatórios e quando o movimento relativo da junta é grande, podendo haver outras fontes de não linearidade como limites de movimento, folgas e áreas de contacto variáveis que precisam ser levados em conta.

### **1.2.6 O Caso Particular das Ligações Soldadas**

A ligação entre estruturas por soldadura é uma das formas mais comuns de unir componentes, principalmente para materiais metálicos. Existem inúmeros processos de soldadura, cada um com aplicações específicas, e com características muito diversificadas, sendo problemática a sua modelação por elementos finitos. De todos os processos de soldadura existentes, a ligação por pontos está bastante generalizada e as características inerentes a este processo de ligação tem sido alvo de estudos recentes.

Algumas décadas atrás, as soldaduras por pontos não eram modeladas por elementos finitos. Para criar uma ligação entre duas partes soldadas por pontos, fazia-se simplesmente com que o conjunto de nós interveniente coincidisse e assim se formava uma ligação (Lardeur et al. 2000:387-394). Esta é uma aproximação muito simples, contudo tem a desvantagem para a modelação do processo das duas partes soldadas terem de ser malhadas simultaneamente. Esta aproximação falha ao não ter em conta as dimensões correctas da soldadura, rigidez e as propriedades de propagação dos esforços. As

soldaduras por pontos devem ser também representadas através de modelos de elementos finitos. Como não é exequível modelar em detalhe cada junta soldada por pontos, o modelo geral da estrutura, deve ser usado para representar cada ligação de soldadura por pontos, de tal modo que sejam obtidas estimativas precisas para o desempenho funcional do conjunto. Segundo Palmonella et al. (2005: 648-661), previsões de rigidez, ruído, vibração e amortecimento num veículo completo, podem ser obtidos com um modelo de soldadura por pontos grosseiro, enquanto que a utilização de uma malha mais fina deve ser usada para análise de fadiga na soldadura por pontos para a qual devem ser avaliadas tensões locais detalhadas. Para Xu e Deng (2004: 1175-1194), numa perspectiva de desenvolvimento de um veículo, os modelos de soldadura por pontos simplificados devem produzir não só previsões de desempenho precisas num tempo limitado, mas também deve ser convenientemente e automaticamente possível integrar os modelos de soldadura por pontos no modelo do veículo, substituir componentes e gerar novas ligações de soldadura por pontos.

Um estudo de quatro modelos de soldadura por pontos para previsão das suas propriedades é apresentado por Lardeur et al. (2000: 387-394). Apresentam resultados utilizando o programa comercial de elementos finitos, Nastran (2001), e confirmam as mesmas tendências com o programa ABAQUS. Um modelo apresentado é dependente da malhagem do componente, o outro modelo é independente. Também são investigadas duas ligações de superfície a superfície: uma malha de componente de ligação dependente com várias barras rígidas, e uma ligação de soldadura por pontos modelada como um elemento sólido. Lardeur et al. (2000: 387-394), fazem um estudo de comparação para os quatro modelos de soldadura por pontos acima referidos. Estes modelos de soldadura por pontos são usados numa estrutura constituída por uma ligação de duas placas e numa subestrutura da frente de um veículo. A convergência de base modal e as estimativas de resposta de frequência é investigada e validada em relação a dados experimentais. A principal conclusão é que os modelos de ligação por soldadura não são satisfatórios. São obtidos modelos muito flexíveis para os quais as frequências próprias não convergem devido a singularidades induzidas pelas forças concentradas e momentos que são gerados nos componentes ligados. Os resultados obtidos são realísticos e é obtida convergência de malha. Os mesmos autores mostram que o modelo de ligação de barra rígido é ligeiramente mais preciso que os restantes quando comparados aos resultados experimentais, mas não é o mais sensível ao refinamento da malha.

Durante os últimos anos, tem havido uma tendência para uma nova geração de programas que ligam directamente CAD e CAE no mesmo ambiente com uma completa associação entre modelos nos dois ambientes. Esta técnica também aplicada ao processo de modelação de soldadura por pontos, tem evitado a tradução fastidiosa de dados CAD para CAE na soldadura por pontos. Um problema prático na transição CAD para CAE é que os projectistas não introduzem todas as soldaduras por pontos no modelo de CAD pelo que podem falhar as rotinas automáticas e alguns componentes não ficam fixados correctamente um ao outro. No entanto o maior problema surge com soldaduras por pontos indefinidas que apenas são descobertas depois do cálculo do modelo estar completo, e frequentemente não são mesmo descobertas (Donders et al. 2006: 670-682).

O desempenho funcional de uma soldadura simples por pontos está relacionada com muitas variáveis, sejam estas tensões residuais, falta de homogeneidade do material, parâmetros de soldadura, espessura, tamanho da soldadura, propriedades do material da zona afectada pelo calor, material de base, acabamentos superficiais, carregamentos ou outros. Um veículo é montado com milhares de soldaduras deste tipo que complicam muito os problemas de projecto associados. Juntas de soldadura por pontos entre placas finas e o corpo do motor de veículos, também foram estudadas em detalhe considerável (Fang, 2000; Zhang e Taylor, 2001: 1013-1022; Palmonella, 2002; Ahmadian et al. 2003; Palmonella et al. 2005: 648-661, Ahmadian, 2006). A determinação da quantidade adequada de soldaduras a fazer na montagem da estrutura de um veículo, é um aspecto importante a ter em conta no projecto. Outras condicionantes estão também envolvidas como os constrangimentos relacionados com o processo de fabricação automatizado, possibilidade de configurações de montagem de componentes da estrutura, incertezas e variabilidades introduzidas pelo processo, que têm de ser considerados na escolha de uma solução optimizada. Kalling (2002) realiza estudos numéricos e testes de validação relacionados com esta variabilidade e obteve correlações com os testes que mostraram que estas variáveis são muito importantes para a validação específica do projecto.

Na fase de modelação numérica o nível de complexidade do problema pode decrescer à custa de erros de aproximação. Os modelos lineares de elementos finitos são actualmente uma representação simplificada do produto, resultante de uma escolha entre uma representação rigorosa e um cálculo rápido. Muitos dos efeitos localizados, tais como irregularidades geométricas, tensões residuais, falta de homogeneidade do material e

defeitos causados pelo processo de soldadura, não são tomados em conta pela modelação por elementos finitos. Dada a complexidade deste problema determinístico, o parâmetro de incerteza e variabilidade introduzido pelo processo de fabricação normalmente também é omitido do modelo.

Dong (1999:1-7), apresenta um modelo generalizado de soldadura por pontos para análise de vários atributos de desempenho na aplicação a estruturas de veículos. O elemento é aplicado a um exemplo e representa uma evolução da análise feita por Zhang (1997:167-185), que já mostra que se pode utilizar um factor de intensidade de tensão para correlacionar a vida de fadiga de soldadura por pontos. Pavic (2000: 807-812), derivou e modelou as propriedades vibro acústicas a altas frequências de juntas soldadas por pontos. Estas juntas são consideradas como filtros mecânicos com transmissibilidade dependente da frequência, reflectividade e propriedades de absorção da energia de vibração. Wang e Lim (2001:1-9) modela um elemento finito dinâmico e determina a representação da junta de soldadura por pontos que caracteriza com precisão a medida da resposta dinâmica desse elemento, a partir de estudos experimentais em peças construídas para o efeito, a partir das quais são extraídas funções de resposta em frequência. Os resultados experimentais são usados para desenvolver vários tipos de modelos de junta que representam com aproximação, segundo o autor, o desenvolvimento dinâmico dos sistemas utilizados nas estruturas dos veículos. São propostos modelos com uma ligação simples rígida, uma barra e uma ligação por molas. O autor conclui que tanto a ligação por barra como por mola, a representatividade da soldadura por pontos é melhor conseguida.

Wung (2001:1-10) propõe uma fórmula muito simples, baseada nos esforços presentes na zona da soldadura que inclui quatro processos de falha numa equação de dimensionamento para prever a falha da soldadura por pontos nas condições de carga estática geral. Na indústria de veículos são usadas três modelações de elementos finitos simples para representar soldaduras por pontos: directamente nos nós, por elementos rígidos de barra simples e por elementos sólidos simples. Zhang (2001:1-14) revê os mais recentes desenvolvimentos em análise e teste de soldadura por pontos. Propõe um modelo elementos finitos circular, constituído por barras rígidas ligadas formando várias circunferências concêntricas, unidas entre si por outros elementos de barra. Palmonella (2005: 648-661) faz uma revisão extensiva de modelos de simulação de soldadura por pontos para obter previsões de tensões e rigidez em análises estáticas e dinâmicas. Donders

et al. (2006: 670-682) foca os tipos de métodos de soldadura por pontos que podem ser usados nos ambientes de desenvolvimento de veículos industriais para os atributos funcionais de preferência na óptica do ruído, vibração e durabilidade e na predição da durabilidade e da robustez da performance dos veículos onde está incorporada sua validade e falha.

### **1.3 Âmbito, Objectivo do Trabalho e Estruturação da Tese**

Com este estudo procura-se contribuir para um melhor conhecimento do melhoramento da simulação numérica do comportamento dinâmico de estruturas através da aplicação de metodologias de optimização aplicadas a modelos de elementos finitos. Para se conseguir este objectivo é necessário utilizar modelos de referência com os quais se comparam os resultados dos modelos de elementos finitos a melhorar. Para a obtenção dessas referências recorre-se à utilização de duas técnicas em paralelo, uma através de outros modelos de elementos finitos obtidos com suficiente detalhe e outra por via experimental. A escolha dos modelos a estudar revela-se primordial, de forma a ser possível identificar as diferenças no comportamento dinâmico da estrutura provocada por diversas ligações. Assim esses modelos devem ser de geometria simples e permitir a ligação entre si através de montagens intermutáveis. As ligações estudadas são a soldadura por pontos, rebitada e aparafusada. De importância particular é a utilização em paralelo de modelos numéricos e de protótipos experimentais. Para a modelação por elementos finitos, é seleccionado o programa comercial ANSYS, para a elaboração do programa de melhoramento é utilizado o MATLAB, assim como as funções de optimização nele disponíveis. Na parte experimental recorre-se ao equipamento da BRUEL & KJAER e para a identificação modal o programa BETA. Na modelação dos modelos numéricos procura-se representar a sua geometria e respectivas propriedades físicas da forma mais aproximada às dos protótipos para se obterem resultados com boa semelhança aos obtidos experimentalmente.

No capítulo 1 resume-se o estado actual do desenvolvimento da modelação por elementos finitos para análise dinâmica estrutural, das ligações entre componentes e dos passos dados para se conseguir a melhor representatividade de modelos. Descrevem-se ainda os principais objectivos pretendidos com o presente trabalho.

No capítulo 2 apresenta-se uma introdução à dinâmica estrutural, ao método dos elementos finitos e caracterizam-se os principais erros associados a este método. Apresentam-se de seguida alguns aspectos ligados ao melhoramento de modelos de elementos finitos com ênfase no correlacionamento com os valores de referência. Apresenta-se um novo método de melhorar a forma de correlacionamento entre as características dinâmicas dos modelos a melhorar e de referência.

No capítulo 3 apresentam-se os principais métodos de optimização e discute-se a sua aplicação prática. Apresenta-se um programa de melhoramento de modelos desenvolvido e aplica-se este a alguns casos exemplificativos.

No capítulo 4 analisam-se as propriedades que influenciam a melhoria dos modelos de elementos finitos utilizando o programa desenvolvido no capítulo anterior. Faz-se uma análise de sensibilidade sobre cada parâmetro variável e averigua-se a sua influência nos resultados. Recorre-se a dois exemplos práticos simples para justificar os resultados obtidos

No capítulo 5 apresentam-se as principais técnicas experimentais utilizadas na análise modal. Introduzem-se também alguns conceitos de identificação modal e explicam-se as escolhas feitas entre os vários métodos disponíveis. Explicam-se ainda os conceitos mais importantes necessários para o melhoramento automático de modelos.

No capítulo 6 faz-se a descrição da parte experimental do trabalho descrevendo as metodologias e preparação das estruturas e explicam-se os principais passos envolvidos na análise dos protótipos. Apresentam-se resultados obtidos numericamente em modelos que simulam os protótipos.

No capítulo 7 apresentam-se e discutem-se todos os resultados experimentais e comparam-se esses resultados com os obtidos numericamente. Executam-se os melhoramentos dos modelos numéricos a partir dos de referência e apresentam-se os resultados obtidos

No capítulo 8 resumem-se as conclusões e apresentam-se recomendações para os trabalhos futuros.

## **CAPÍTULO 2 – DINÂMICA DE ESTRUTURAS POR ELEMENTOS FINITOS**

A maior parte, dos sistemas de engenharia são de elevada complexidade pelo que a sua resposta a acções exteriores é de avaliação difícil através de modelos extremamente detalhados. Por essa razão, recorre-se à construção de modelos simplificados, dos quais é possível calcular uma resposta exacta, que têm por objectivo representar aproximadamente o sistema mais complexo. O método habitual de construção dos modelos aproximados consiste em identificar os componentes mecânicos constituintes do sistema a representar, determinando as características dinâmicas de cada um deles individualmente, quer experimentalmente quer através de modelos mais detalhados. De seguida procede-se à assemblagem do conjunto formando um modelo do sistema completo (Meirovitch, 2001:26). Deste processo resulta que para um determinado sistema é possível construir vários modelos diferentes. A escolha do melhor modelo depende acima de tudo da aplicação. O objectivo de qualquer modelo é sempre avaliar com mais ou menos rigor a resposta do sistema mecânico ou estrutural. Muitos sistemas podem ser simulados por modelos extremamente simplificados, eventualmente com um grau de liberdade, enquanto que noutros casos, mais complexos, os modelos desenvolvidos não podem evitar a utilização de múltiplos graus de liberdade. Os modelos de sistemas mecânicos ou estruturas desenvolvidos nesta forma são chamados sistemas discretos, ou sistemas de parâmetros concentrados. Esta forma de modelação constitui uma importante metodologia

de desenvolvimento de ferramentas numéricas para a resolução de problemas da engenharia, em particular no estudo de vibrações.

A resposta de um sistema às solicitações a que está sujeito depende das suas características, e é regida pelas equações diferenciais de movimento que descrevem o seu equilíbrio dinâmico. A linearidade da resposta num sistema, quando existe, constitui uma vantagem uma vez que a solução das equações de movimento pode ser obtida com métodos numéricos bastante eficientes. Pode-se, neste caso, aplicar o princípio de sobreposição na obtenção da resposta dinâmica, o que já não acontece nos sistemas não lineares. Este mesmo princípio permite que a resposta de sistemas lineares, sujeitos a condições iniciais e a solicitações externas possa ser obtido separadamente para cada caso de carga, sendo depois as respostas combinadas linearmente.

Independentemente dos tipos de solicitação exteriores serem transientes ou estacionários as respostas dos modelos podem ser obtidas numericamente o que implica um processamento de um modelo discreto cuja resposta dinâmica varia no tempo. Excitações aleatórias requerem geralmente modelos numéricos completamente diferentes, sendo a sua resposta obtida em termos de quantidades estatísticas. As equações de movimento de sistemas com múltiplos graus de liberdade são derivadas de forma expedita e eficiente através das equações de Lagrange. A sua solução pode ser obtida através de diversas metodologias, entre as quais se destacam, para sistemas mecânicos com comportamento linear, aquelas que envolvem equações independentes obtidos pela análise modal, que envolve a solução de um problema algébrico de valores próprios. Os sistemas estruturais investigados neste trabalho são descritos por equações diferenciais parciais que utilizam sistemas de parâmetros distribuídos e que podem ser resolvidos utilizando, no processo, um problema de valores próprios.

Também em alguns sistemas estruturais não lineares, onde o princípio de sobreposição não pode ser utilizado, algumas das metodologias utilizadas requerem a linearização das equações de movimento, num determinado ponto de equilíbrio, seguida da resolução do problema de valores próprios. No entanto em sistemas com reduzida não linearidade, os resultados podem ser obtidos quantitativamente utilizando técnicas de perturbação, que envolvem métodos de análise linear.



Quando as solicitações exteriores sobre o sistema estrutural são aleatórias a resposta dinâmica deste é também aleatória e só pode ser definida por metodologias estatísticas. Entre as técnicas de resolução destes problemas destacam-se os processos Gaussianos aleatórios, nos quais as respostas são definidas através do valor médio e do desvio padrão utilizando o domínio de frequência obtido através da transformação de Fourier, em lugar do domínio do tempo.

Como a maior parte dos problemas de valores próprios utilizados em dinâmica estrutural não admite soluções analíticas estes são resolvidos utilizando métodos numéricos nos quais o problema é reduzido a um problema de valores próprios algébrico. A resolução deste problema tem como base a construção de um modelo discreto que aproxima o sistema estrutural. Os principais métodos de discretização de sistemas estruturais utilizados são os métodos de Rayleigh-Ritz, de Galerkin e o de elementos finitos, sendo de interesse prático apenas o último.

## 2.1 Introdução

O método dos elementos finitos permite a discretização de um sistema contínuo através da aproximação da resposta por funções seleccionadas, sendo apenas desconhecidos os pesos da contribuição de cada função para a resposta final. No método dos elementos finitos estes pesos estão directamente associados aos deslocamentos de pontos determinados da estrutura, designados por nós. Este método requer a solução de um elevado número de equações algébricas, quer para respostas estáticas quer para problemas de valores próprios utilizados no estudo de vibrações, para o que é necessário a utilização de computadores com eficiência aceitável (Meirovitch, 2001:549). Courant (1943:1-23) foi um dos pioneiros do método de elementos finitos através do seu trabalho publicado num artigo nos anos 40 (Moaveni, 2003:6). Mais tarde foi na Boeing que pela primeira vez se apresentou uma aplicação com carácter industrial utilizando elementos finitos triangulares para modelar asas de avião. Certamente que o trabalho de Clough (1960:345-378), foi o primeiro de grande visibilidade que tornou o método de elementos finitos mais popular. O primeiro trabalho de Argyris (1954:347-356) conduziu à expressão do método dos elementos finitos em forma semelhante à actual. Em 1967 Zienkiewicz e Cheung (1967) escreveram o primeiro livro completamente dedicado para o método de elementos finitos e que ainda hoje, depois de revisões substanciais, continua a ser a sua maior referência. No entanto foi no final dos anos 60 que Arantes e Oliveira (1965) desenvolveu a descrição

matemática do método dos elementos finitos, sendo hoje reconhecido como um dos pais desta metodologia.

Certamente na origem do método dos elementos finitos encontra-se o trabalho de Galerkin (Becker E. e outros, 1981) onde são estabelecidos os princípios numéricos para integração de equações diferenciais. O método de elementos finitos (FEM) é também referido como uma importante variante do método de Rayleigh-Ritz (Meirovitch, 2001:549). Com a evolução do FEM o método de Rayleigh-Ritz, na sua versão clássica, que assenta no princípio da conservação da energia, tem um interesse meramente académico. No entanto, existem algumas vantagens em tratar o método de elementos finitos como um método de Rayleigh-Ritz. A base matemática onde assenta a teoria de Rayleigh-Ritz revela-se muito adequada à descrição eficiente das características dinâmicas de um modelo discreto quando comparado com a possibilidade da descrição exacta da estrutura distribuída original.

## **2.2 Equação de Equilíbrio Dinâmico de Estruturas**

Para um melhor enquadramento da utilização dos FEM na dinâmica de estruturas revêem-se aqui os principais conceitos envolvidos. Um sistema dinâmico é definido como um conjunto de elementos, aos quais estão associadas massas, que são capazes de movimentos relativos (Moaveni, 2003:575-578). Exemplos de sistemas dinâmicos incluem estruturas, veículos, equipamentos espaciais, mecanismos, componentes de máquinas e outros. Na maioria das aplicações em engenharia a vibração e ruído podendo ser indesejáveis não são evitáveis. Há sistemas mecânicos, como vibradores, misturadores, máquinas rotativas e outros que são projectadas tendo em conta o seu carácter vibratório. Noutros equipamentos, tais como veículos, edifícios, mecanismos de precisão, pretende-se minimizar os efeitos negativos das vibrações, especificamente em determinadas gamas de frequências. Antes de discutir aqui as formulações de elementos finitos para problemas dinâmicos, revêem-se conceitos básicos relacionados com vibração de sistemas mecânicos e estruturais.

Devido à variação de velocidade dos elementos estruturais, caracterizados por massas e inércias não desprezáveis, e à aplicação de forças exteriores a energia cinética de um sistema pode variar no tempo. Os componentes elásticos do sistema são capazes de armazenar energia elástica de deformação, numa primeira fase, e de a restituir de seguida.

Os materiais que compõem o sistema têm amortecimento levando à dissipação de alguma da sua energia. Por outro lado pode existir energia a ser introduzida no sistema através dos seus apoios ou por aplicação directa de forças exteriores.

A discretização do sistema contínuo corresponde à descrição do seu campo de deslocamentos através da utilização de um número limitado de parâmetros associados a pontos específicos da estrutura. Neste contexto, cada um destes parâmetros é designado por grau de liberdade e os pontos específicos nos quais estão localizados são designados por nós. No método dos elementos finitos os parâmetros livres são deslocamentos da estrutura.

As equações de equilíbrio dinâmico que governam a resposta linear dinâmica de uma estrutura é definida em forma matricial por (Clough e Penzien, 1975:149-150):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{p}(t). \quad (2.1)$$

em que  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente. O vector de carga externo é representado por  $\mathbf{p}(t)$  e  $\ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{x}$  são os vectores das acelerações, velocidades e deslocamentos nodais da estrutura. Matematicamente a equação (2.1) representa o equilíbrio dinâmico de um sistema de graus de liberdade múltiplos sendo de facto um sistema de  $N$  equações diferenciais lineares de segunda ordem.

## 2.3 Problema de Valores Próprios

### 2.3.1 Análise sem Amortecimento

Considerando apenas a parte homogénea da equação (2.1) e desprezando o amortecimento, a resposta dinâmica harmónica é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\omega) \sin(\omega t + \theta) \quad (2.2)$$

Substituindo a equação (2.2) na parte homogénea sem amortecimento da equação (2.1) conduz ao problema de valores próprios, definido como

$$\|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\| \cdot \mathbf{x}(\omega) = 0 \quad (2.3)$$

Para o qual os valores próprios são obtidos pela resolução de

$$\|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\| = 0 \quad (2.4)$$

O problema representado pela equação (2.4) tem  $N$  raízes, que são os quadrados das frequências naturais do sistema.

Cada um dos modos de vibração do sistema, designados por  $\boldsymbol{\varphi}_i$ , é obtido substituindo a frequência natural  $\omega_i$  na equação (2.3) e resolvendo-a. O modo de vibração  $\boldsymbol{\varphi}_i$  corresponde à sua solução não trivial. Os modos de vibração são organizados numa matriz modal escrita como:

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\varphi}_N] \quad (2.5)$$

A análise dinâmica de uma estrutura linear, para efeitos de avaliação de vibração, requer a solução de um problema de valores próprios. Os termos quadrados da frequência na equação (2.4) são os valores próprios e os modos forma são os vectores próprios sendo  $\boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{x}(\omega_i)$ . As amplitudes dos valores próprios são arbitrárias, ou seja, qualquer modo  $\boldsymbol{\varphi}_i$  multiplicado por qualquer constante não nula satisfaz a equação (2.3). No entanto os modos forma de vibração livre  $\boldsymbol{\varphi}_i$  são expressos de forma a garantir algumas propriedades destes modos. A equação (2.3) é agora rescrita da forma:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_i \quad (2.6)$$

em que o termo do lado direito da equação pode ser interpretado como uma força inercial e o do lado esquerdo como uma força elástica resistente. Assim, o movimento de vibração livre pode considerar-se como causado pelos deslocamentos produzidos pelas forças de inércia actuando como cargas aplicadas. Considere-se agora a equação (2.6) escrita para dois modos de vibração diferentes. Aplicando a lei de Betti e transformando a equação (2.6) obtém-se (Clough e Penzien, 1975:185-186):

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_m = 0 \quad (2.7)$$

dado que  $\mathbf{M}$  é uma matriz simétrica. Da expressão (2.7) obtém-se duas condições de ortogonalidade,

$$\boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n = 0 \quad \text{com } \omega_m \neq \omega_n \quad (2.8)$$

$$\omega_n^2 \boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n = \boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n = 0 \quad \text{com } \omega_m \neq \omega_n \quad (2.9)$$

o que mostra que os modos de vibração são ortogonais entre si. Quando  $m=n$  as relações entre os modos de vibração são escritas como:

$$\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n = m_n^* \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n = k_n^* \quad (2.11)$$

onde  $m_n^*$  e  $k_n^*$  são respectivamente a massa modal e rigidez modal da estrutura associadas com o modo de vibração  $n$ .

Uma vez que os modos de vibração podem ser multiplicados por qualquer constante, assume-se que estes estão multiplicados pela constante  $\sqrt{1/m_n^*}$  em tudo o que se segue. Neste caso, a massa modal é unitária, ou seja

$$\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n = 1 \quad (2.12)$$

o que conduz à condição de ortogonalização da matriz modal descrita por

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I} \quad (2.13)$$

onde  $\boldsymbol{\Phi}$  é um conjunto completo de  $N$  modos forma normalizados, anotada na equação (2.5) e  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade  $N \times N$ . Os modos de vibração quando multiplicados pela matriz de rigidez levam a

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Lambda} \quad (2.14)$$

em que  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\omega_i^2)$  é diagonal, tendo o quadrado das frequências naturais como coeficientes. O deslocamento dos nós da estrutura é obtido pela soma dos componentes modais, isto é,

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}_1 y_1 + \boldsymbol{\varphi}_2 y_2 + \dots + \boldsymbol{\varphi}_N y_N = \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\varphi}_n y_n(t) \quad \text{ou} \quad \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}(t) \quad (2.15)$$

em que  $y_n$  representa a amplitude modal do vector modo forma  $\boldsymbol{\phi}_n$ , designada de coordenada modal da estrutura. As coordenadas modais da estrutura são os parâmetros desconhecidos do problema de análise dinâmica transiente de uma estrutura. A relação entre os parâmetros modais e os deslocamentos nodais é dada por

$$y_n = \frac{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \mathbf{x}(t)}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n} \quad (2.16)$$

As equações de movimento da estrutura dadas pela equação (2.1) utilizam coordenadas nodais. Substituindo a equação (2.15) na equação (2.1), desprezando o amortecimento, obtém-se a equação do movimento da estrutura descrita por coordenadas modais, escrita como

$$\mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \Phi \mathbf{y} = \mathbf{p}(t). \quad (2.17)$$

pré-multiplicando a equação (2.17) pela matriz modal transposta conduz a

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{y}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{y} = \Phi^T \mathbf{p}(t). \quad (2.18)$$

Tendo em conta a ortogonalidade dos modos de vibração dados pelas equações (2.13) e (2.14), a equação (2.18) reduz-se a

$$\mathbf{y} + \Lambda \mathbf{y} = \Phi^T \mathbf{p} \quad (2.19)$$

ou seja, a resposta dinâmica pode então ser escrita separadamente para cada coordenada modal como

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{p}(t) \quad (2.20)$$

É de notar que, devido às condições de ortonormalidade a massa generalizada é unitária, a rigidez generalizada é igual ao quadrado da frequência natural correspondente e a carga generalizada é o produto interno do modo de vibração pelo vector das cargas.

### 2.3.2 Análise Dinâmica com Amortecimento

Considere-se agora o amortecimento na equação do movimento. Utilizando um procedimento semelhante ao utilizado na obtenção da equação (2.20), a equação de movimento da estrutura amortecida é dada por

$$\ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{p}(t) \quad (2.21)$$

em que o amortecimento modal é dado por

$$C_i \equiv \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}_i \quad (2.22)$$

É de notar que tal como as matrizes de massa e de rigidez, também a matriz de amortecimento é uma matriz simétrica. No entanto, a identificação do amortecimento estrutural é uma das maiores dificuldades em dinâmica estrutural. Uma aproximação do amortecimento estrutural é obtida assumindo-se que a matriz de amortecimento está relacionada linearmente com as matrizes de massa e de rigidez. Desta forma (Weaver e Johnston, 1987:165)

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K} \quad (2.23)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes de proporcionalidade. A expressão da equação (2.23), atribuída a Rayleigh, é chamada amortecimento proporcional porque a matriz  $\mathbf{C}$  é proporcional às matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$ . Nesta situação as equações de movimento (2.21) obtidas pela mesma transformação que foi usada para o sistema não amortecido são independentes entre si. A Matriz de amortecimento modal é diagonal, escrita como

$$\mathbf{C}_m = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}^T (a\mathbf{M} + b\mathbf{K}) \boldsymbol{\Phi} \quad (2.24)$$

tendo em conta que a matriz modal é composta por modos de vibração ortonormais em relação a  $\mathbf{M}$ , a matriz amortecimento modal fica

$$\mathbf{C}_m = a\mathbf{I} + b\boldsymbol{\omega}^2 \quad (2.25)$$

a matriz diagonal  $\boldsymbol{\omega}^2$  na equação (2.25) contem os valores característicos  $\omega_i^2$  para o caso não amortecido. A equação de movimento para a coordenada normal  $i$  é escrita como

$$\ddot{y}_i + (a + b\omega_i^2)\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = p_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.26)$$

Defina-se a grandeza auxiliar  $n_i = (a + b\omega_i^2)/2$ . Neste caso o coeficiente de amortecimento modal é dado por

$$C_{m_i} = 2n_i \quad (2.27)$$

O termo  $C_{m_i}$  é definido como a constante de amortecimento modal para o modo normal  $i$ .

Substituindo a equação (2.27) na equação (2.26), obtém-se

$$\ddot{y}_i + 2n_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = p_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.28)$$

As  $n$  equações representadas pela equação (2.28) são independentes entre si. A resposta dinâmica da coordenada modal  $i$  é representada por uma equação semelhante a um sistema de um grau de liberdade com amortecimento viscoso.

Expresse-se a razão de amortecimento modal  $\gamma_i$  em termos das constantes  $a$  e  $b$ , como:

$$\gamma_i = \frac{a + b\omega_i^2}{2\omega_i} \quad (2.29)$$

nesta expressão, se a constante  $a$  for igual zero, o amortecimento modal é proporcional à matriz de rigidez, como se pode observar por análise da equação (2.23). Este tipo de amortecimento designa-se normalmente amortecimento relativo porque está associado com velocidades relativas de coordenadas de deslocamento. Nestas circunstâncias a equação (2.29) torna-se

$$\gamma_i = \frac{b\omega_i}{2} \quad (2.30)$$

o que significa que a razão de amortecimento em cada modo principal é proporcional à frequência angular não amortecida daquele modo. Neste caso, as respostas dos modos mais altos de um sistema serão amortecidas mais depressa que as dos modos mais baixos.



Se  $b$  for nulo, a matriz de amortecimento é proporcional à matriz de massa, tal como se observa na equação (2.23). Neste caso o amortecimento é chamado de amortecimento absoluto porque está associado a velocidades absolutas de coordenadas de deslocamento e a equação (2.29) simplifica-se para

$$\gamma_i = \frac{a}{2\omega_i} \quad (2.31)$$

o que expressa a razão de amortecimento em cada modo como sendo inversamente proporcional à frequência angular não amortecida. Nesta condição os modos de um sistema associados às frequências naturais mais baixas são mais facilmente suprimidos que os modos mais altos.

No caso mais geral, os coeficientes amortecimento na matriz  $\mathbf{C}$  são tais que a matriz amortecimento não pode ser simultaneamente diagonalizada em relação às matrizes de massa e de rigidez. Os valores próprios para este tipo de sistema ou são reais e negativos ou complexos com partes reais negativas. Em sistemas altamente amortecidos onde as condições imaginárias devido a forças de dissipação são significativas, o método utilizado envolve a transformação do  $n$  equações de movimento de segunda ordem em  $2n$  equações independentes de primeira ordem. No entanto estes sistemas com matrizes de amortecimento mais gerais não são considerados neste trabalho.

Em estruturas ligeiramente amortecidas, como acontece nos casos estudados neste trabalho, o problema pode ser resolvido de uma maneira mais simples. O problema é aproximado assumindo-se que as equações de movimento são independentes, usando a matriz modal obtida para a estrutura sem amortecimento. Assim, a matriz  $\Phi$  assume-se ortogonal não só em relação a  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  mas também em relação a  $\mathbf{C}$ , como segue:

$$\Phi_j^T \mathbf{C} \Phi_i = \Phi_i^T \mathbf{C} \Phi_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.32)$$

A relação expressa pela equação (2.32) implica que quaisquer termos fora da diagonal, resultantes da operação  $\mathbf{C}_m = \Phi^T \mathbf{C} \Phi$  são pequenos e podem ser desprezados. É mais conveniente obter experimentalmente a razão de amortecimento  $\gamma_i$  para os modos naturais de vibração do que determinar directamente os coeficientes da matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$ . Como mencionado por Weaver e Johnston (1987:167), a gama da razão de amortecimento

para estruturas metálicas é aproximadamente 0.01 a 0.05, enquanto que para o betão reforçado é aproximadamente 0.05 a 0.10. Com o valor de  $\gamma_1$  obtido, podem-se extrapolar os restantes valores de  $\gamma_i$  usando a expressão:

$$\gamma_i \approx \gamma_1 \left( \frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^{e_1} \quad (0.5 \leq e_1 \leq 0.7) \quad (2.33)$$

A equação (2.33) determina de facto um fortíssimo amortecimento dos modos de vibração correspondentes às frequências mais altas, conforme os amortecimentos obtidos experimentalmente, mas não tão severo como o amortecimento implícito na equação (2.30). Alternativamente, pode-se simplesmente determinar  $\gamma_1$  e então deixar  $\gamma_i = \gamma_1$  para todos os outros modos.

A equação (2.28) é agora reescrita para incluir a razão de amortecimento  $\gamma_i$  como

$$\ddot{y}_i + 2\gamma_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.34)$$

onde  $C_i = 2\gamma_i\omega_i$ . Para que esta equação represente uma estrutura ligeiramente amortecida, especifica-se também que  $0 \leq \gamma_i \leq 0.20$  para todos os modos. O tipo de amortecimento associado a este conjunto de condições é designado por amortecimento modal. Deve-se ter em conta que este conceito é utilizado no contexto da utilização das coordenadas normais para o sistema não amortecido e que as razões de amortecimento são especificadas apenas para essas coordenadas.

Quando o amortecimento modal é utilizado no âmbito das coordenadas nodais é também possível determinar a matriz amortecimento  $\mathbf{C}$  nas coordenadas originais (ou físicas). Os valores da matriz de amortecimento podem ser determinados por meio da transformação inversa

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}^{-T} \mathbf{C}_m \mathbf{\Phi}^{-1} \quad (2.35)$$

Note-se que a equação (2.35) implica que o número de modos de vibração conhecidos é igual ao número de graus de liberdade do sistema, o que é geralmente falso. Assumindo

que apenas  $M$  modos de vibração são conhecidos, em vez de tentar inverter  $\Phi$ , usa-se a relação  $\Phi^{-1} = \Phi_M^T \mathbf{M}$  na equação (2.35). A matriz de amortecimento da estrutura fica

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \Phi_M \mathbf{C}_m \Phi_M^T \mathbf{M} \quad (2.36)$$

em que  $\Phi_M$  é a matriz modal constituída por  $M$  modos de vibração. Esta forma da transformação é especialmente apropriada quando nem todos os modos naturais estão incluídos na análise (truncamento modal). As razões de amortecimento podem assim ser obtidas experimentalmente enquanto que as frequências modais e as formas do modo são obtidos pela resolução do problema de valores e vectores próprios associado à discretização do problema, ou também experimentalmente.

## 2.4 Modelos de Elementos Finitos para Análise Modal

O conceito básico do método dos elementos finitos traduz-se na divisão de um meio contínuo em sub-regiões com uma geometria mais simples que o problema original. Cada sub-região, ou elemento finito tem um tamanho finito e um número de pontos a partir dos quais se estabelece o campo de deslocamentos, chamados nós. Na formulação de elementos finitos, são usadas funções de forma próprias para exprimir os deslocamentos para cada ponto material interno ao elemento em função dos valores dos deslocamentos nos nós. Para tal é necessário escrever um número finito de equações diferenciais de movimento para cada nó. As funções de forma descrevem deslocamentos genéricos em qualquer ponto do elemento que são dependentes dos deslocamentos nodais. Da mesma forma as velocidades e acelerações no interior de um elemento são também dependentes dos valores nodais, das velocidades e das acelerações. Neste trabalho são aplicados fundamentalmente dois tipos de elementos: os elementos de viga e os de casca. Desta forma apresentam-se alguns conceitos subjacentes ao método dos elementos finitos (FEM) exemplificados com a utilização destes elementos apenas.

Começando pelos elementos de viga, assuma-se que um elemento finito tridimensional sem amortecimento é descrito em coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$ , e  $z$ . Os deslocamentos genéricos, variáveis no tempo  $\mathbf{u}(t)$ , em qualquer ponto dentro do elemento são expressos por

$$\mathbf{u}(t) = [u \ v \ w]^T \quad (2.37)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são translações nas direcções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Se o elemento estiver sujeito a esforços variáveis no tempo, estes podem ser expressos pelo vector  $\mathbf{b}(t)$ , escrito como

$$\mathbf{b}(t) = [b_x \ b_y \ b_z]^T \quad (2.38)$$

em que  $b_x$ ,  $b_y$  e  $b_z$  representam componentes dos esforços, por unidade de volume, área ou comprimento que actuam num ponto genérico. É assumido que a variação no tempo para cada componente destes esforços é a mesma ao longo do elemento. Pode-se assim ter uma variação no tempo para  $b_x$  outra para  $b_y$  e uma terceira para  $b_z$ .

Os deslocamentos nodais variáveis no tempo  $\mathbf{q}(t)$  por enquanto apenas incluem as translações nas direcções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Seja  $n_{en}$  o número de nós do elemento. Então

$$\mathbf{q}(t) = [\mathbf{q}_1(t)^T \ \mathbf{q}_2(t)^T \ \dots \ \mathbf{q}_{n_{en}}(t)^T]^T \quad (2.39)$$

onde

$$\mathbf{q}_i(t) = [q_{x_i} \ q_{y_i} \ q_{z_i}]^T = [u_i \ v_i \ w_i]^T \quad (2.40)$$

Também as solicitações nodais variáveis no tempo  $\mathbf{p}(t)$  serão por enquanto assumidas apenas como forças nos nós, nas direcções  $x$ ,  $y$  e  $z$  isto é,

$$\mathbf{p}(t) = [\mathbf{p}_1(t)^T \ \mathbf{p}_2(t)^T \ \dots \ \mathbf{p}_{n_{en}}(t)^T]^T \quad (2.41)$$

nas quais

$$\mathbf{p}_i(t) = [p_{x_i} \ p_{y_i} \ p_{z_i}]^T \quad (2.42)$$

É de notar que a variação no tempo para  $p_{xi}$ ,  $p_{yi}$  e  $p_{zi}$  em cada nó são independentes e arbitrárias, dependendo apenas do caso de aplicação.

Para o tipo de elementos finitos aqui considerados assumem-se que as funções de forma relacionam os deslocamentos do interior do elemento com os deslocamentos dos nós, através de

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F} \mathbf{q}(t) \quad (2.43)$$

em que  $\mathbf{F}$  representa uma matriz rectangular que contém as funções que descrevem a dependência de  $\mathbf{u}(t)$  em  $\mathbf{q}(t)$ .

O campo de extensões do elemento é obtido por diferenciação do campo de deslocamentos internos. Este processo pode ser expresso formando uma matriz  $\mathbf{D}$ , chamada um operador linear diferencial, e aplicando-o ao campo de deslocamentos

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (2.44)$$

em que  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  é o campo de extensões no interior do elemento. Substituindo a equação (2.43) na (2.44) resulta em

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{B} \mathbf{q}(t) \quad (2.45)$$

em que a matriz das extensões  $\mathbf{B}$  é dada por

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{F} \quad (2.46)$$

ou seja a matriz  $\mathbf{B}$  relaciona as extensões em qualquer ponto interior do elemento com os deslocamentos nodais.

A relação entre tensão e a extensão, para materiais lineares elásticos com pequenas deformações, é descrita pela lei de Hook escrita como

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (2.47)$$

onde  $\mathbf{E}$  é uma matriz de elasticidade que relaciona tensões variáveis no tempo, expressas pelo vector  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  com as extensões, descritas pelo vector  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ . Substituindo a equação (2.45) na equação (2.47) conduz a

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{q}(t) \quad (2.48)$$

em que a matriz  $\mathbf{E} \mathbf{B}$  relaciona as tensões num ponto genérico com os deslocamentos nodais.

O Principio dos trabalhos virtuais (Weaver e Johnston, 1984:80) é utilizado aqui para estabelecer as condições de equilíbrio do elemento. Este princípio estabelece que

$$\delta U_e = \delta W_e \quad (2.49)$$

onde  $\delta U_e$  é a energia de extensão virtual das tensões internas e  $\delta W_e$  é o trabalho virtual das acções externas no elemento. Designe-se por  $\delta \mathbf{q}$  o vector de deslocamentos virtuais

$$\delta \mathbf{q} = [\delta \mathbf{q}_1^T \delta \mathbf{q}_2^T \dots \delta \mathbf{q}_{n_{en}}^T]^T \quad (2.50)$$

O campo de deslocamentos virtuais no interior do elemento é dado pela mesma relação descrita pela equação (2.43)] como

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{F} \delta \mathbf{q} \quad (2.51)$$

A relação entre extensão e deslocamento virtual é dado por

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{q} \quad (2.52)$$

o que conduz à energia elástica virtual, expressa por

$$\delta U_e = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}(t) dV \quad (2.53)$$

em que  $V$  é o volume do elemento.

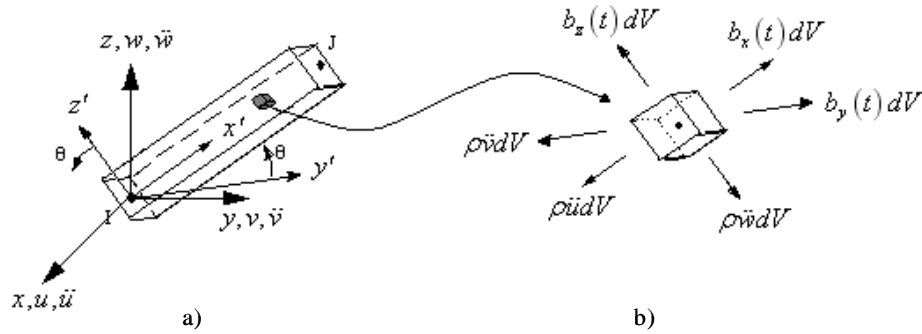


Figura 2.1 Elemento de viga no sistema de eixos local e global; a) elemento de viga (I,J);

b) esforços sobre um elemento infinitesimal  $dx \, dy \, dz$

As forças aplicadas a um elemento infinitesimal representado na figura 2.1, são dadas por  $b_x(t) \, dV$ ,  $b_y(t) \, dV$  e  $b_z(t) \, dV$ . As forças de inércia no elemento são  $\rho \ddot{u} \, dV$ ,  $\rho \ddot{v} \, dV$ , e  $\rho \ddot{w} \, dV$ . O símbolo  $\rho$  nestas expressões representa a densidade de massa do material. As

forças de inércia actuam em direcções opostas ao sentido positivo das acelerações. O trabalho virtual é expresso em função dos deslocamentos virtuais fazendo a soma de todas as contribuições no volume do elemento, dadas pelo produto interno das forças pelo deslocamento dos seus pontos de aplicação. O trabalho virtual é dado por

$$\delta W_e = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{p}(t) + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}(t) dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.54)$$

Substituindo as equações (2.53) e (2.54) na equação (2.49) resulta em

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}(t) dV = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{p}(t) + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}(t) dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (2.55)$$

Uma vez que as funções de forma dos elementos não são variáveis no tempo, o campo de acelerações no elemento obtém-se pela segunda derivada em ordem ao tempo da equação (2.43), escrita como

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F} \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.56)$$

Substituindo-se as equações (2.48) e (2.56) na equação (2.55) e rearranjando obtém-se

$$\delta \mathbf{q}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{p}(t) + \delta \mathbf{q}^T \int_V \mathbf{f}^T \mathbf{b}(t) dV - \delta \mathbf{q}^T \int_V \rho \mathbf{f}^T dV \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.57)$$

Cancelando  $\delta \mathbf{q}^T$  e rearranjando as equações de movimento resultantes dá

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{p}(t) + \mathbf{p}_b(t) \quad (2.58)$$

onde a matriz de rigidez é dada por

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (2.59)$$

e a matriz de massas se escreve como

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV \quad (2.60)$$

o vector de forças volumétricas é escrito como

$$\mathbf{p}_b(t) = \int_V \mathbf{F}^T \mathbf{b}(t) dV \quad (2.61)$$

A equação (2.60) representa a matriz consistente de massa. O vector  $\mathbf{p}_b(t)$  na equação (2.61) consiste nas cargas nodais equivalentes devido às forças volumétricas aplicadas ao corpo e descritas pelo vector  $\mathbf{b}(t)$ .

Quando os eixos locais nos quais o elemento finito é definido, não forem paralelos aos eixos globais da estrutura é necessário transformar os vectores de cargas, deslocamentos e acelerações, nodais e as matrizes de rigidez e massas do sistema de coordenadas do elemento para o sistema de coordenadas globais antes da assemblagem das matrizes globais da estrutura. Assim, quando os elementos finitos individuais são assemblados, as equações de movimento resultantes são definidas nas direcções globais.

Os vectores são transformados do sistema local para um global utilizando

$$\mathbf{a} = \mathbf{R} \mathbf{a}' \quad (2.62)$$

em que  $\mathbf{R}$  é a matriz de transformação,  $\mathbf{a}$  é o vector em coordenadas globais e  $\mathbf{a}'$  é o mesmo vector expresso em coordenadas locais. Como  $\mathbf{R}$  é ortogonal a sua inversa é igual à transposta. A transformação inversa escreve-se por

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R}^T \mathbf{a} \quad (2.63)$$

A transformação de uma matriz  $\mathbf{A}'$  de coordenadas locais para coordenadas globais é escrita como

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{A}' \mathbf{R}^T \quad (2.64)$$

As equações de movimento de um elemento finito expressas em coordenadas locais, são transformadas para coordenadas globais. Assim a equação de movimento de um elemento finito  $j$  em coordenadas globais é escrito como

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{K}_j \mathbf{q}_j = \mathbf{p}_j(t) + \mathbf{p}_{b_j}(t) \quad (2.58)$$

na qual

$$\mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{K}' \mathbf{R}^T \quad (2.65)$$

e



$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \mathbf{M}' \mathbf{R}^T \quad (2.66)$$

Sendo os vectores de cargas transformados por

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{R} \mathbf{p}'(t) \quad (2.67)$$

e

$$\mathbf{p}_b(t) = \mathbf{R} \mathbf{p}'_b(t) \quad (2.68)$$

Depois da rigidez, massas, e cargas nodais, para elementos individuais, serem transformadas para as direcções globais, montam-se e adicionam-se as contribuições de todos os elementos para obter a rigidez, massas, e cargas nodais para a estrutura completa. Assim, a assemblagem de matrizes e vectores é escrita como

$$\mathbf{K}_s = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{K}_i \quad \mathbf{M}_s = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{M}_i \quad (2.69)$$

e

$$\mathbf{p}_s(t) = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{p}_i(t) \quad \mathbf{p}_{sb}(t) = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{p}_{bi}(t) \quad (2.70)$$

onde o símbolo de somatório indica uma soma booleana, ou assemblagem e  $n_e$  é o número de elementos utilizados na rede de elementos finitos. Nas equações (2.69) os símbolos  $\mathbf{K}_s$  e  $\mathbf{M}_s$  representam a matriz de rigidez estrutural e a matriz de massa estrutural para todos os nós. De forma semelhante, os vectores acções  $\mathbf{p}_s(t)$  e  $\mathbf{p}_{sb}(t)$  nas Eqs. (2.70) são a carga global e nodal equivalente para a estrutura completa. Então as equações de movimento sem considerar o amortecimento para a estrutura assemblada escrevem-se

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{K}_s \dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{p}_s(t) + \mathbf{p}_{sb}(t) \quad (2.71)$$

em que  $\mathbf{x}_s$  e  $\ddot{\mathbf{x}}_s$  são vectores de deslocamentos e acelerações nodais, respectivamente. A equação (2.71) representa as equações estruturais de movimento para todos os deslocamentos nodais, independentemente deles serem livres ou restringidos.

Considere-se agora um elemento de placa sujeita a forças aplicadas na direcção normal ao seu próprio plano. Neste tipo de problema lida-se com flexão e tensões de corte

e deformações que são análogas às análises com vigas. No entanto agora o problema é bidimensional. Por sua vez as cascas são tridimensionais e é necessário considerar não apenas a flexão e as tensões de deformações de corte, mas também os efeitos associados com as deformações de membrana.

Considerando uma placa rectangular num sistema de eixos coordenados natural  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  ortogonais, um deslocamento modal no ponto  $i$  é designado por:

$$\mathbf{q}_i = [q_{i_1} q_{i_2} q_{i_3}]^T = [w_i \theta_{x_i} \theta_{y_i}]^T \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (2.72)$$

onde  $\theta_{x_i}$  e  $\theta_{y_i}$  são rotações positivas em relação aos eixos dos  $x$  e dos  $y$ . Dois tipos de constrangimentos têm de ser introduzidos: os nós na mesma normal à superfície média têm igual translação na direcção  $\zeta$ ; as normais à superfície média permanecem rectas, durante a deformação, embora não necessariamente normais a esta.

A figura 2.2 mostra um elemento de placa quadrilateral de flexão, de espessura constante  $h$ , com a sua superfície neutra no plano  $\xi$ - $\eta$ . A sua superfície neutra é definida por

$$x = \sum_{i=1}^8 f_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^8 f_i y_i \quad (z=0) \quad (2.73)$$

onde as funções de forma  $f_i$  são dadas por (Weaver e Johnston, 1987:374)

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(-1+\xi_0+\eta_0) & (i=1, 2, 3, 4) \\ f_i &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0) & (i=5, 7) \\ f_i &= \frac{1}{2}(1+\xi_0)(1-\eta^2) & (i=6, 8) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Os deslocamentos genéricos em cada ponto da superfície neutra são  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$

$$\mathbf{u} = [u_\xi \ v_\eta \ w_\zeta]^T \quad (2.75)$$

Os componentes dos deslocamentos no interior do elemento relacionam-se com os deslocamentos nodais através de

$$\begin{aligned}
 u &= z\theta_y = z \sum_{i=1}^8 f_i \theta_{yi} \\
 v &= -z\theta_x = -z \sum_{i=1}^8 f_i \theta_{xi} \\
 w &= \sum_{i=1}^8 f_i w_i
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

onde  $z = \zeta h/2$ .

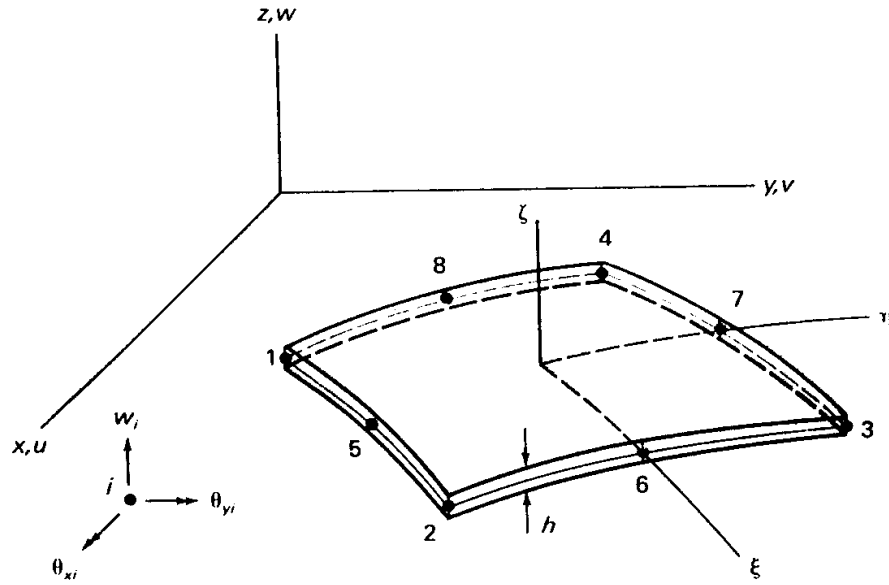


Figura 2.2 Elemento de placa quadrangular de flexão

Através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, a matriz de rigidez para este tipo de elemento, é obtida como (Weaver e Johnston, 1987:375-377)

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \mathbf{B}_A + \zeta \frac{h}{2} \mathbf{B}_B \right)^T \mathbf{E} \left( \mathbf{B}_A + \zeta \frac{h}{2} \mathbf{B}_B \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \tag{2.77}$$

que integrando na espessura do elemento resulta

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( 2\mathbf{B}_A^T \mathbf{E} \mathbf{B}_A + \frac{h^2}{6} \mathbf{B}_B^T \mathbf{E} \mathbf{B}_B \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \tag{2.78}$$

em que  $\mathbf{B}_A$  e  $\mathbf{B}_B$  são matrizes 5 x 24 obtidas a partir da seguinte expressão

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_A + \zeta \frac{h}{2} \mathbf{B}_B \quad (2.79)$$

onde a matriz  $\mathbf{B}_i$  é dada pela equação (2.46). Na equação (2.78) a matriz de elasticidade  $\mathbf{E}$  representa a relação tensão-extensão para materiais lineares, elásticos e isotrópicos e  $\mathbf{J}$  é uma matriz Jacobiana respeitante ao elemento descrito.

A matriz de massa para este mesmo elemento é descrita como (Weaver e Johnston, 1987:378)

$$\mathbf{M} = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \mathbf{F}_A + \zeta \frac{h}{2} \mathbf{F}_B \right)^T \left( \mathbf{F}_A + \zeta \frac{h}{2} \mathbf{F}_B \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad (2.80)$$

que integrando na espessura do elemento conduz a

$$\mathbf{M} = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( 2\mathbf{F}_A^T \mathbf{F}_A + \frac{h^2}{6} \mathbf{F}_B^T \mathbf{F}_B \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (2.81)$$

As matrizes  $\mathbf{F}_A$  e  $\mathbf{F}_B$  estão relacionadas com a matriz da função de forma de deslocamento,  $\mathbf{F}$ , através de

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \zeta \frac{h}{2} \mathbf{F}_B \quad (2.82)$$

O primeiro termo da equação (2.81) para a matriz  $\mathbf{M}$  representa os valores das inércias de translação e o segundo os valores das inércias rotacionais

As cargas nodais equivalentes, devidas às forças actuantes no elemento, são calculadas como (Weaver e Johnston, 1987:378)

$$\mathbf{p}_b(t) = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}_A^T \mathbf{b}(t) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (2.83)$$

na qual

$$\mathbf{b}(t) = [0 \ 0 \ b_z]^T \quad (2.84)$$

sendo  $b_z$  a força por unidade de volume na direcção  $z$ .

No caso dos elementos de casca a metodologia utilizada na sua derivação é idêntica à dos elementos de placa sujeita a flexão. As coordenadas nodais são adicionadas de duas translações,  $u_i$  e  $v_i$ . Como no elemento de placa, o elemento de casca genérico é formulado directamente. As coordenadas de cada ponto do interior do elemento são relacionadas com os deslocamentos nodais através da equação (2.74). Os deslocamentos em cada ponto no interior do elemento, em relação aos eixos globais pelo vector descrito pela equação (2.75). Os deslocamentos nodais, nas direcções globais, são três translações e ainda duas rotações escritos como

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & \theta_{x_i} & \theta_{y_i} \end{bmatrix}^T \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (2.85)$$

A matriz de rigidez para o elemento de placa/casca é (Weaver e Johnston, 1987:385-390)

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( (\mathbf{T}_e \mathbf{B}_A) + \zeta (\mathbf{T}_e \mathbf{B}_B) \right)^T \mathbf{E} \left( (\mathbf{T}_e \mathbf{B}_A) + \zeta (\mathbf{T}_e \mathbf{B}_B) \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad (2.86)$$

que integrando na espessura do elemento resulta em

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( 2(\mathbf{T}_e \mathbf{B}_A)^T \mathbf{B}_A^T \mathbf{E} (\mathbf{T}_e \mathbf{B}_A) + \frac{2}{3} (\mathbf{T}_e \mathbf{B}_B)^T \mathbf{E} (\mathbf{T}_e \mathbf{B}_B) \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (2.87)$$

em que  $\mathbf{T}_e$  é a matriz de transformação do elemento e  $\mathbf{B}_A$  e  $\mathbf{B}_B$  são matrizes obtidas a partir de

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_A + \zeta \mathbf{B}_B \quad (2.88)$$

em que a matriz  $\mathbf{B}_i$  é obtida pela equação (2.46).  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana respeitante ao elemento.

A matriz de massa para o elemento de placa/casca, após integração na espessura, é escrita como

$$\mathbf{M} = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( 2\mathbf{F}_A^T \mathbf{F}_A + \frac{2}{3} \mathbf{F}_B^T \mathbf{F}_B \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (2.89)$$

em que a primeira parcela da equação (2.89) representa os valores das inércias de translação e a segunda os valores das inércias rotacionais.

As cargas nodais equivalentes devidas às forças actuantes no elemento são expressas pela equação (2.83), na qual

$$\mathbf{b}(t)=[b_x \ b_y \ b_z]^T \quad (2.90)$$

é o vector de carga que contem os componentes de força por unidade de volume, que são uniformes ao longo da espessura da casca.

## 2.5 Método dos Sub-espacos

Um dos métodos mais eficientes utilizado na extracção dos parâmetros modais de problemas FEM de grandes dimensões é o método iterativo dos sub-espacos. Este método é descrito em detalhes por Bathé (1982), com melhoramentos sugerido por Wilson e Itoh (1983:259-265) inicia-se com uma estimativa arbitrária para os modos de vibração. O vector deslocamento pode ser expresso em termos de um conjunto de funções de forma assumidas  $\mathbf{f}_r$  (funções de forma de Ritz) e de coordenadas de amplitude generalizada  $z$ , (Clough e Penzien, 1975:250-252; Friswell e Mottershead, 1995:20-21) através de

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}_{r_1} z_1 + \mathbf{f}_{r_2} z_2 + \dots + \mathbf{f}_{r_N} z_N = \sum_{n=1}^N \mathbf{f}_{r_n} z_n \quad \text{ou} \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{z} \quad (2.91)$$

A aproximação é tanto melhor quanto mais próximos forem os vectores  $\mathbf{f}_{r_n}$  dos modos de vibração verdadeiros  $\boldsymbol{\phi}_n$ . O método iterativo dos sub-espacos permite, iterativamente, calcular os modos de vibração  $\boldsymbol{\phi}_n$  a partir das aproximações  $\mathbf{f}_{r_n}$ . Consiste nos seguintes passos (Ambrósio, 1984; Ambrósio e outros, 1985:29-39):

- a) arbitrar um conjunto de vectores iterativos iniciais, cujo número está dependente do número de valores próprios pretendidos. Normalmente a relação entre estes é dada por:

$$q = \min (2p, p+8)$$

em que  $q$  é o número de vectores iterativos e  $p$  o número de vectores próprios pretendido.

b) execução do processo iterativo dos sub-espacos que consiste fundamentalmente na utilização de iterações inversas simultâneas sobre os  $q$  vectores, utilizando a técnica de Rayleigh-Ritz (Meirovitch, 2001:550-563) de forma a extrair os melhores valores e vectores no fim de cada iteração.

c) aplicação da verificação sequencial de Sturm no final do processo iterativo de forma a determinar se a convergência dos valores próprios é no sentido da determinação dos valores mais baixos.

Partindo dos  $q$  vectores iterativos que formam a base do sub-espaço  $E_k$  o processo iterativo para atingir os vectores que formam o novo sub-espaço  $E_{k+1}$  desenrola-se de acordo com o seguinte algoritmo.

Determina-se  $\bar{\Psi}_{k+1}$  resolvendo o sistema de equações

$$\mathbf{K} \bar{\Psi}_{k+1} = \mathbf{M} \Psi_k \quad (2.92)$$

em que  $\Psi$  é a matriz constituída pelos  $q$  vectores iterativos obtidos na iteração anterior, i. é., na iteração  $K-1$

$$\Psi = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_q] \quad (2.93)$$

Encontram-se as projecções da matriz de rigidez e de massas no sub-espaço  $E_{k+1}$

$$\bar{\mathbf{K}}_{k+1} = \bar{\Psi}_{k+1}^T \mathbf{K} \bar{\Psi}_{k+1} \quad (2.94)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{k+1} = \bar{\Psi}_{k+1}^T \mathbf{M} \bar{\Psi}_{k+1} \quad (2.95)$$

Com as matrizes projectadas resolve-se o problema de valores e vectores próprios associado ao sub-espaço  $E_{k+1}$

$$\bar{\mathbf{K}}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} = \bar{\mathbf{M}}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} \Theta_{k+1} \quad (2.96)$$

em que as colunas de  $\mathbf{Q}_{k+1}$  contêm os vectores do sub-espaço e  $\Theta_{k+1}$  é uma matriz diagonal cujos coeficientes são os valores próprios. Uma nova aproximação para os vectores próprios, calcula-se usando

$$\Psi_{k+1} = \bar{\Psi}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} \quad (2.97)$$

Desde que os vectores iterativos  $\Psi_1$  não sejam ortogonais relativamente a um dos vectores próprios que se pretendem calcular e estando ordenados de forma que os correspondentes valores próprios sejam respectivamente,

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_q$$

Com  $\lambda = \omega^2$ , o método converge para os valores próprios mais baixos e para os correspondentes vectores próprios, sendo em cada iteração as tolerâncias dos valores próprios, dadas por

$$tol \ c_i^{k+1} = \frac{|\lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k|}{\lambda_i^{k+1}} \quad (2.98)$$

Considera-se que o processo convergiu quando para todos os  $p$  valores próprios que se pretendem calcular, se

$$tol \ c_i^{k+1} \leq tol \quad i = 1, \dots, p \quad (2.99)$$

em que  $tol$  é um número pequeno normalmente igual a  $10^{-6}$ .

Bathé (1982) concluiu que nas condições anteriormente enunciadas, os vectores iterativos convergem linearmente para os vectores próprios, enquanto que a convergência dos valores próprios é quadrática, sendo as razões de convergência respectivamente dadas por:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_i^k = \frac{\lambda_i}{\lambda_{q+1}} \quad (2.102)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_i^k = \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_{q+1}} \right)^2 \quad (2.101)$$

em que  $\lambda_{q+1}$  é o valor próprio correspondente ao vector próprio  $\Psi_{q+1}$ .



Apesar de aqui se assumir a utilização do método dos sub-espacos, outros métodos para cálculo de valores e vectores próprios são postos à disposição do utilizador em programas de análise por elementos finitos comerciais e pelo ANSYS em particular. Quando se pretendem calcular todos os vectores próprios do modelo Weaver e Johnston (1987:106-108) recomendou a utilização das transformações de Jacobi (1846:51-94), ou Givens (1954) ou o método de Householder (Martin e Wilkinson, 1968: 181-195). No cálculo dos valores e vectores próprios de um sub-espaço, no método iterativo dos sub-espacos, é utilizado um destes métodos. Se são apenas desejados alguns dos vectores próprios, é mais eficiente utilizar métodos baseados na iteração inversa (Timoshenko, Young e Weaver, 1974; Weaver e Johnston, 1980) com agrupamento espectral. No processo iterativo é fundamental que as aproximações aos modos de vibração, que ainda não tenham convergido, não sejam ortogonais aos modos que se pretendem calcular. Para isso, algumas das aproximações iniciais aos modos de vibração são gerados aleatoriamente.

## **2.6 Utilização do Programa ANSYS para Análise de Elementos Finitos**

Os passos básicos de qualquer análise FEM são: pré processamento; solução; pós processamento (Moaveni, 2003:6-8). O pré processamento é composto pelos seguintes passos:

1. Define-se geometricamente o modelo discretizando-se o domínio em elementos finitos, isto é, subdividindo-se a estrutura em nós e elementos formando desta forma a rede de elementos finitos.
2. Seleccionam-se os elementos a utilizar, isto é, escolhem-se e associam-se as funções de forma para representar o domínio físico de cada elemento.
3. São desenvolvidas as equações de equilíbrio de cada tipo de elemento utilizado e são montadas, com base nestas, as equações de equilíbrio do problema completo. Este passo corresponde à assemblagem das matrizes de rigidez e massa e dos vectores de cargas.
4. Aplicam-se as condições fronteira, as condições iniciais, e de carregamento.

Os programas comerciais de elementos finitos permitem executar todos estes passos de forma automática através de interfaces gráficas. Entre estes, o programa ANSYS (1997) é utilizado neste trabalho para o desenvolvimento de todos os modelos de elementos finitos. O ANSYS contém um pré-processador (Lawrence, 2003) com os comandos necessários para criar modelos de elementos finitos. Os programas comerciais permitem a escolha dos elementos entre os existentes em bibliotecas de elementos finitos que podem ser bastante extensas. Alguns dos elementos usados pelo programa são apresentados na tabela 2.1 uma vez que são utilizados em modelos estruturais desenvolvidos neste trabalho. O ANSYS oferece vários tipos de soluções de problemas de elementos finitos e vários métodos de extracção de resultados. No caso do presente trabalho o objectivo é a análise modal com o fim de caracterizar dinamicamente as estruturas.

Tabela 2.1 Elementos finitos seleccionados utilizados no programa ANSYS

| Tipos de Aplicação dos Modelos  | Forma             | Nome     | Graus de liberdade              |
|---------------------------------|-------------------|----------|---------------------------------|
| Vigas (esforços e flexão)       | Tridimensionais   | BEAM4    | Ux, Uy, Uz, ROTx, ROTy, ROTz    |
| Casca                           | Elástico de 4 nós | SHELL63  | Ux, Uy, Uz, ROTx, ROTy, ROTz    |
|                                 | Elástico de 8 nós | SHELL93  | Ux, Uy, Uz, ROTx, ROTy, ROTz    |
|                                 | Corte ou rotação  | SHELL28  | Ux, Uy, Uz, ou ROTx, ROTy, ROTz |
|                                 | Membrana          | SHELL41  | Ux, Uy, Uz                      |
|                                 | 2D axisimétrico   | SHELL51  | Ux, Uy, Uz, ROTz                |
|                                 | Axi-harmónico     | SHELL61  | Ux, Uy, Uz, ROTz                |
| Massa                           | 1 nó              | MASS21   | Ux, Uy, Uz, ROTx, ROTy, ROTz    |
| Elemento genérico com [M, K, C] | 1 nó              | MATRIX27 | Ux, Uy, Uz, ROTx, ROTy, ROTz    |
| Mola - amortecedor              | 2 nós             | COMBIN14 | Ux, Uy, Uz (ROTx, ROTy, ROTz)   |
|                                 | 2 nós             | COMBIN40 | Ux, Uy, Uz (ROTx, ROTy, ROTz)   |

Este programa oferece as seguintes opções para cálculo do problema de valores e vectores próprios: Lanczos, Sub-espço, Powerdynamics, Reduzido, Unsymmetric, Damped, e QR Damped (ANSYS, 1997). O método de Lanczos é recomendado para a solução de problemas de valores próprios simétricos grandes, uma vez que tem uma taxa de convergência rápida. Alternativamente pode ser seleccionado o método dos sub-espços, descrito anteriormente, para resolver problemas simétricos de grande dimensão. Este método é recomendado quando se pretende encontrar um número reduzido de modos de vibração de modelos de elementos finitos grandes, isto é, até cerca de 40 modos de vibração. O Powerdynamics é um método recomendado para modelos muito grandes, com

mais de 100,000 graus de liberdade, que utiliza uma aproximação da matriz de massas com massas concentradas. É um método muito rápido a convergir mas menos preciso que os anteriores. Neste trabalho é utilizado o método dos sub-espacos em todas as análises de valores e vectores próprios.

## 2.7 Erros Associados ao Métodos de Elementos Finitos

O método dos elementos finitos, como todos os métodos numéricos, têm limitações que conduzem a erros nos resultados das análises. Os erros que contribuem para as limitações dos modelos podem ser classificados em:

1. Erros de definição do problema, isto é, nos dados de entrada tais como propriedades físicas e dimensões. Pela sua natureza estes erros devem ser corrigidos antes de prosseguir com qualquer análise.
2. Utilização imprópria de elementos seleccionados. Este erro, grosseiro, corresponde à formulação de um problema distinto daquele que é proposto. Antes da análise prosseguir é fundamental que este tipo de erros esteja eliminado.
3. Aplicação errada das cargas e condições fronteira. Antes de qualquer análise prosseguir, estes erros têm que ser eliminados sem o que o problema resolvido, se altera, e é certamente diferente do pretendido.
4. Fraca discretização da geometria da estrutura por exemplo, devido a um tamanho de malha inadequado ou aproximação grosseira de geometrias. Existe sempre um compromisso entre erro aceitável e detalhe exigível à discretização uma vez que não é possível eliminar completamente os erros, limitações, de discretização. De notar ainda que os programas de elementos finitos permitem malhagem livre e malhagem mapeada, havendo limitações associadas com cada uma.
5. Erros inerentes aos métodos numéricos utilizados na solução das equações de equilíbrio. Estes erros são devidos à precisão finita dos métodos, a condições não controláveis, ou expectáveis, dos problemas e outras.

A decomposição de uma estrutura com complexidade apreciável num número geralmente muito elevado de elementos para obter uma boa descrição geométrica, mesmo

em estruturas relativamente pouco complexas, pode levar à ocorrência de erros. Estes ocorrem devido às dificuldades de adaptação da rede de elementos finitos à geometria do modelo, mesmo aplicando malhas correctas em relação a cada problema concreto (Ribeiro, 1999:26-29). Quanto maior for o número de elementos, maior o número de operações matemáticas envolvidas, traduzindo-se na diminuição da fiabilidade dos resultados finais obtidos devido aos processos de propagação de erros numéricos, uma vez que se tratam de métodos aproximados. As principais fontes de erros de discretização são: simplificações na modelação dos elementos, dificuldade de modelar com precisão pormenores mais complexos, como sejam contornos curvos, estruturas internas heterogéneas, soldaduras, materiais compósitos, etc.; imprecisões nos valores utilizados para as próprias características mecânicas dos materiais. Todas estas dificuldades podem conduzir a modelos globais que traduzem mal o comportamento efectivo das estruturas a modelar. Por estas razões, é necessário encontrar um equilíbrio adequado entre a precisão dos modelos teóricos e o seu grau de discretização. Os modelos numéricos demasiado detalhados conduzem também a processos numéricos mais propícios à propagação de erros sendo computacionalmente mais pesados.

Para melhor ilustrar as dificuldades de modelação apresenta-se um exemplo ilustrativo com a determinação dos modos de vibração de uma placa representada por elementos finitos. As características da estrutura, representada na figura 2.3, são apresentadas na tabela 2.2.

Tabela 2.2 Características da placa.

| Propriedade            |                 |                      | Valor                |
|------------------------|-----------------|----------------------|----------------------|
| Espessura              | $h$             | [mm]                 | 1.07                 |
| Densidade              | $\rho$          | [Kg/m <sup>3</sup> ] | 7745                 |
| Módulo de elasticidade | $E_x$           | [MPa]                | $1.69 \cdot 10^{11}$ |
| Módulo de elasticidade | $E_y = E_z$     | [MPa]                | $1.69 \cdot 10^{11}$ |
| Coeficiente de Poisson | $\nu_x$         |                      | 0.329                |
| Coeficiente de Poisson | $\nu_y = \nu_z$ |                      | 0.353                |
| Módulo de ditorção     | $G_{xy}$        | [MPa]                | $6.91 \cdot 10^{10}$ |
| Módulo de ditorção     | $G_{yz}$        | [MPa]                | $7.17 \cdot 10^{10}$ |
| Módulo de ditorção     | $G_{xz}$        | [MPa]                | $6.80 \cdot 10^{10}$ |

É de notar que durante a determinação experimental das propriedades mecânicas do material, observou-se a existência de anisotropia. As dimensões da peça apresentam também alguma falta de uniformidade, pelo que se consideram os seus valores médios na

definição do modelo numérico. No modelo de elementos finitos da placa utilizam-se elementos de casca designados por SHELL63, descritos na tabela 2.1.

Pretende-se avaliar a influência do número de elementos utilizados no modelo sobre resultados em termos das frequências naturais. Para tal consideram-se vários tamanhos de malha com forma idêntica. Para cada modelo um conjunto de resultados obtidos está sintetizado na tabela 2.3.

Na definição da forma da malha, utiliza-se a funcionalidade do programa de elementos finitos de malhagem livre. Apenas se exige que cada linha do modelo seja dividida num número igual de partes de forma a que a distribuição da malha seja mais detalhada nas zonas da peça com mais pormenores geométricos. Este critério permite manter uma maior uniformidade no processo de distribuição da malha durante o cálculo para os vários modelos.

Tabela 2.3 Frequências naturais em função do número de elementos de malha

| N.º Elementos | Frequências naturais (Hz) |       |        |        |        |        |        |        |
|---------------|---------------------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|               | 1ª                        | 2ª    | 3ª     | 4ª     | 5ª     | 6ª     | 7ª     | 8ª     |
| 118           | 26.48                     | 62.51 | 102.93 | 178.87 | 184.31 | 196.43 | 256.15 | 306.32 |
| 201           | 24.38                     | 59.84 | 91.69  | 152.02 | 177.67 | 181.73 | 216.52 | 269.36 |
| 283           | 23.97                     | 58.60 | 90.63  | 149.04 | 175.51 | 180.16 | 213.10 | 265.39 |
| 597           | 24.08                     | 58.42 | 91.18  | 148.21 | 175.57 | 180.84 | 212.35 | 262.54 |
| 1655          | 23.86                     | 57.84 | 90.04  | 145.05 | 175.34 | 180.13 | 210.73 | 260.83 |
| 5986          | 23.82                     | 57.78 | 90.49  | 145.24 | 175.17 | 180.02 | 210.38 | 260.34 |
| 9073          | 23.76                     | 57.70 | 90.54  | 145.37 | 175.13 | 180.02 | 210.35 | 260.36 |
| 10511         | 23.73                     | 57.71 | 90.65  | 145.35 | 174.97 | 180.79 | 211.16 | 260.66 |

Na tabela 2.3, observam-se valores diferentes em cada frequência natural conforme o número de elementos finitos empregue, sendo a diferença mais notória nos modelos com menor número de elementos. Na figura 2.3 ilustram-se três casos de distribuição de malhas, onde se pode observar claramente a variação da sua densidade. Assumindo-se a malha mais densa, com 10511 elementos como a exacta, os seus resultados são utilizados como referência. O gráfico mostrado na figura 2.4 apresenta o valor do erro de cada frequência natural relativamente à do modelo de referência em função do número de elementos envolvidos. Observando os resultados, do gráfico, figura 2.4, verifica-se que o erro cresce consideravelmente quando o número de elementos é menor que 200. Para uma quantidade de elementos superior a 600 o erro é inferior a 3% reduzindo-se continuamente, mas de uma forma insignificante.

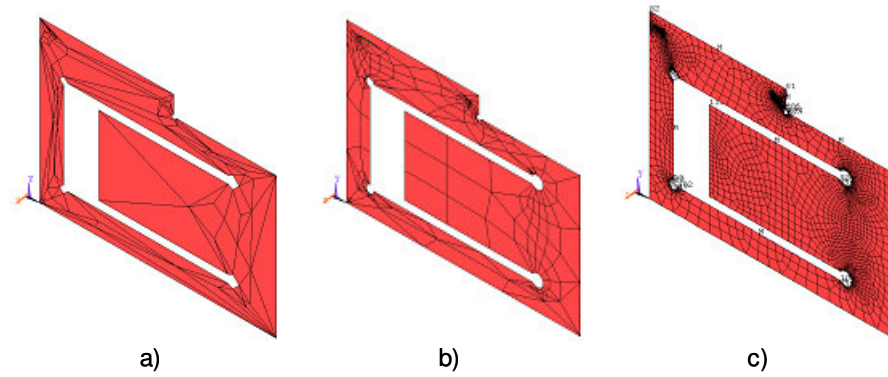


Figura 2.3 Exemplos de malhas de elementos finitos para a placa secundária, PLS 164:

a) 118 elementos; b) 283 elementos; c) 5986 elementos.

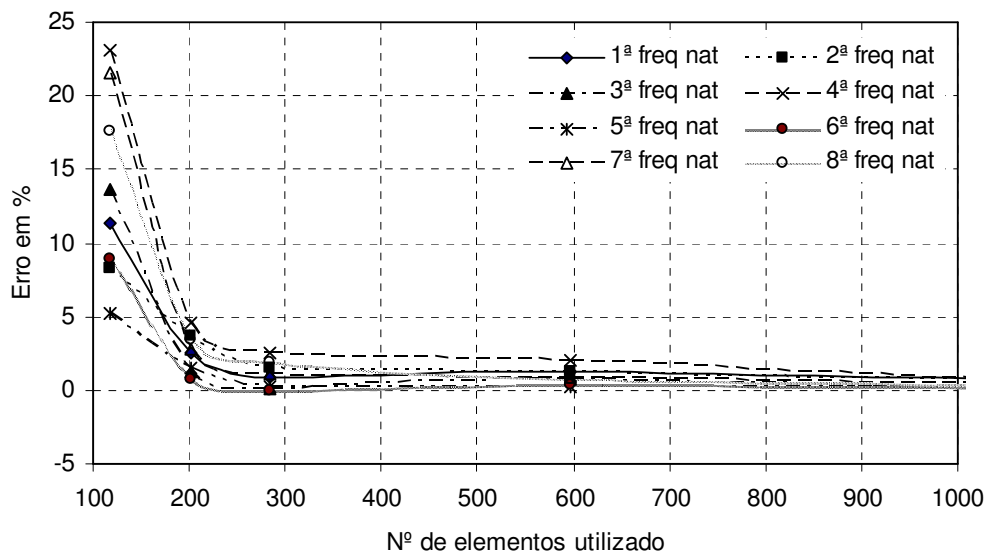


Figura 2.4 Evolução dos erros das frequências naturais em relação ao número de elementos utilizado.

Na maior parte das aplicações industriais surgem ligações entre dois ou mais elementos dos sistemas. A representação destas ligações é muitas vezes difícil, isto é, as condições de fronteira que as representam não são fáceis de definir. Normalmente nas análises por elementos finitos, os constrangimentos aplicados são considerados de corpo rígido, o que representa uma aproximação grosseira e condiciona a precisão dos resultados. É muitas vezes necessário utilizar elementos de ligação adequados e considerar parâmetros, como massa, rigidez, amortecimento, etc., que materializem correctamente essas ligações. Uma ligação por soldadura não tem o mesmo comportamento que uma aparafusada, colada ou rebitada. Uma ligação aparafusada tem um comportamento

diferente conforme o binário de aperto utilizado. Esta é uma área de aplicação de técnicas de melhoramento de modelos de elementos finitos (Mottershead e outros, 1994: 481-492). No entanto, antes de se proceder a qualquer melhoramento do modelo, é necessário reduzir as incertezas de modelação que surgem devidos aos erros já listados (Braun, 2002:844-855).

## **2.8 Melhoramento de Elementos Finitos e a Correlação entre Modelos**

A previsão do comportamento dinâmico de uma estrutura é normalmente feita através da resposta do seu modelo de elementos finitos. No entanto a qualidade dos resultados assim obtidos pode ser mais ou menos baixa devido à consistência dos erros descritos anteriormente. A construção, quando possível, de protótipos sobre os quais se executem ensaios modais podem conduzir à validação dos resultados obtidos numericamente. Usando os resultados experimentais, o modelo numérico é corrigido de forma a que os seus resultados numéricos se aproximem dos valores de referência, assumidos como exactos. O modelo assim corrigido pode ser utilizado para a previsão do comportamento em serviço da estrutura possibilitando o planeamento de eventuais alterações ou a obtenção de outras respostas para as quais não seja conveniente, ou possível, a obtenção de valores experimentais. O melhoramento dos modelos estruturais traduz-se geralmente na modificação pontual das grandezas características da estrutura, nomeadamente da rigidez, densidade, espessura equivalente, etc. dos elementos utilizados. A variabilidade destes valores, definidos como médias obtidas a partir de amostragens estatísticas são utilizadas como limites aos valores usados nos modelos validados, ou melhorados. As razões das variabilidades das grandezas físicas prendem-se com os processos de fabricação, não sendo por isso evitáveis.

A validação de um modelo numérico é feita em três passos. No primeiro faz-se uma comparação directa e objectiva de propriedades mecânicas medidas relativamente às projectadas. É aqui que se quantifica a extensão das diferenças entre os dois conjuntos de dados através do cálculo da correlação entre os resultados, medidos ou calculados. No segundo passo identifica-se ou localizam-se as fontes de discrepância entre os dois modelos. O passo final é ajustar ou modificar os conjuntos de propriedades relevantes que conduzam à aproximação entre as respostas medidas e calculadas. O objectivo é conseguir um 'melhoramento' ou 'reconciliação' entre o modelo e a referência. Uma vez alcançado este objectivo, o modelo numérico fica validado e é considerado ajustado, podendo ser

usado em posteriores análises. O principal objectivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia de melhoramento de modelos de elementos finitos a partir de respostas dinâmicas de referência.

A pertinência deste objectivo é cada vez maior, pois a produção de modelos experimentais sucessivos durante o desenvolvimento de um produto, é normalmente cara e demorada. Este facto motiva o desenvolvimento e utilização de metodologias que permitam reduzir o tempo de desenvolvimento de soluções estruturais eficazes. O melhoramento de modelos numéricos de elementos finitos tem aqui um papel cada vez mais importante.

O modo clássico para reduzir as discrepâncias entre resultados de modelos analíticos e dados obtidos por testes experimentais é modificar por tentativa e erro os dados utilizados nas idealizações mecânicas e os parâmetros do modelo analítico. Para modelos de FE complexos, estas tentativas de aproximação por tentativa-e-erro são morosas e não garantem os melhores resultados.

A avaliação da qualidade do modelo é feita de forma sistemática. Primeiro, verifica-se se o modelo reproduz suficientemente bem a estrutura real através da sua validação. De seguida, procede-se à escolha dos parâmetros a corrigir e à comparação entre os modelos, correlacionando os resultados numéricos e experimentais. Esta comparação deve englobar as frequências naturais e os modos de vibração que caracterizam os modelos. Finalmente, procede-se ao melhoramento dos parâmetros seleccionados, através da minimização da diferença entre os resultados obtidos com o modelo melhorado e as respostas de referência.

A metodologia para obter o melhoramento directo dos parâmetros dos modelos numéricos utilizados no ANSYS, é apresentada neste trabalho. Há vários procedimentos apresentados com este mesmo objectivo na literatura especializada. Fundamentalmente os procedimentos mais comuns baseiam-se em técnicas de estimação numéricas para resolver as equações de melhoramento, ou na minimização de resíduos formados pelas diferenças entre a análise e o teste, em que os resíduos são formados por equações de erro de resultados. A escolha dos parâmetros a melhorar recai nas propriedades físicas e geométricas que estão mais relacionadas com as fontes de erro. A análise detalhada sobre a escolha e influência de cada parâmetro no melhoramento do modelo é desenvolvida no capítulo 4 deste trabalho.



Para que o melhoramento do modelo seja possível é necessário escolher um processo de comparação fiável. Embora os dados de resposta experimentais possam ser obtidos com testes experimentais, os modelos numéricos não permitem obter directamente as funções de resposta em frequência (FRF) sem envolver uma grande quantidade de procedimentos no cálculo de uma resposta característica da estrutura (Ewins, 2000:417-422). Pelo contrário as propriedades modais podem ser obtidas individualmente e serem feitas comparações entre gamas de frequência específicas com facilidade. A comparação de propriedades modais levanta novos problemas experimentais, como por exemplo a extracção das propriedades modais a partir dos resultados obtidos em testes experimentais.

Encontram-se frequentemente dificuldades na comparação entre frequências naturais medidas e calculadas devido a problemas de emparelhamento dos modos experimentais e numéricos. Considerando que em estruturas simples com modos bem separados este emparelhamento não apresenta nenhuma dificuldade, em estruturas mais complexas, especialmente naquelas com frequências naturais próximas, assegurar que os pares de modo correlacionados são identificados correctamente é mais difícil. Consequentemente é desejável fazer simultaneamente comparações de modos de vibração e das respectivas frequências naturais. A comparação gráfica de deformadas calculadas e medidas experimentalmente foi explorada, sempre tentando envolver as propriedades dinâmicas características dos modelos. Mas em todas elas é sempre problemática a análise rigorosa dos modelos de maneira a obter, de uma forma racional e expedita, as diferenças entre eles. Uma dificuldade adicional refere-se à possibilidade dos modos de vibração serem complexos, o que dificulta a visualização gráfica dos elementos dos vectores próprios completos. Este problema é contornado tomando a amplitude de cada elemento do vector próprio e adicionando-lhe um sinal + ou -, dependendo da proximidade do ângulo de fase a  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ . Na maior parte dos casos esta simplificação é razoável, no entanto para modos altamente complexos é necessário empregar uma transformação que torna a comparação gráfica directa entre estes modos mais difícil. Por estas razões a comparação gráfica de modos de vibração e de deformadas só é utilizada actualmente qualitativamente.

Vários trabalhos foram desenvolvidos utilizando técnicas para quantificar a diferença entre os modos de vibração medidos experimentalmente e calculados numericamente. Uma quantificação da comparação é calculada pela expressão do Factor de

Ponderação Modal (Modal Scale Factor MSF) (Maia, Silva e outros, 1998:350-351) que é definida por:

$$MSF(\varphi_{RA}) = \frac{|\varphi_R^T \varphi_A^*|}{\varphi_A^T \varphi_A^*} \quad (2.102)$$

que representa o valor da inclinação da melhor linha directa que passa pelos pontos baseados numa comparação entre um modo de vibração medido experimentalmente,  $\varphi_R$ , e o modo de vibração de um modelo numérico  $\varphi_A$ , nos  $n$  GDL para o qual ambos os dados estão disponíveis, com  $\varphi_A^*$  o conjugado de  $\varphi_A$ . Este parâmetro não dá nenhuma indicação sobre a qualidade do ajuste dos pontos.

A medida de correlação mais conhecida é designada por Coeficiente de Correlação Modo Forma (Mode Shape Correlation Coefficient (*MSCC*)) ou Critério de Garantia Modal (Modal Assurance Criterion (*MAC*)) (Allemang e Brown, 1982:110-116). Esta medida é definida como

$$MAC_{ij} = \frac{|\varphi_{R_i}^T \varphi_{A_j}|^2}{(\varphi_{R_i}^T \varphi_{R_i})(\varphi_{A_j}^T \varphi_{A_j})} \quad (2.103)$$

onde  $\varphi_{R_i}$  é o  $i^{esimo}$  modo de vibração de referência e  $\varphi_{A_j}$  é o  $j^{esimo}$  modo de vibração numérico. Este parâmetro é uma medida do desvio de mínimos quadrados ou 'dispersão' dos valores dos modos de vibração em comparação e representa uma quantidade escalar, mesmo se esses modos sejam complexos. Quando dois modos de vibração estão bem correlacionados o valor do *MAC* aproxima-se da unidade enquanto que quando a correlação é fraca o valor é nulo ou próximo de zero. Assim dois modelos estão bem correlacionados quando a matriz dos valores do *MAC* é diagonal unitária, sendo os coeficientes fora da diagonal nulos ou pequenos. Este critério não discrimina se as divergências entre modos são devidas à sua dispersão aleatória ou a desvios sistemáticos dos seus valores, o que constitui uma limitação do método. No entanto estes parâmetros já permitem quantificar com objectividade o grau de correlação entre dois conjuntos de modos de vibração.

Se os modos de vibração experimental e de projecto estiverem perfeitamente correlacionados ou seja representarem a mesma forma, então o valor do Critério de Garantia *MAC* apresenta um valor unitário, enquanto que se o seu relacionamento se apresentar como o de dois modos de forma diferentes o valor obtido do *MAC* aproxima-se muito de zero. Aproveitando esta propriedade pode-se estendê-la ao conjunto total de modos de vibração dos modelos. Assim dado um conjunto de  $m_R$  modos de referência (experimentais) e um conjunto de  $m_A$  modos numéricos, pode-se calcular um conjunto de  $m_R \times m_A$  critérios de garantia modal e representá-los numa matriz que indicará claramente como o modelo experimental se relaciona com o numérico. Na figura 2.5 mostra-se um exemplo aplicado na correlação dos modos de vibração entre dois modelos da mesma geometria, um obtido num ensaio experimental e outro obtido numericamente. Na figura 2.5(a) apresentam-se, em forma de tabela, os valores *MAC* obtidos, e na figura 2.5(b) a sua representação gráfica em forma de matriz. A cor preta representa um valor de *MAC* próximo da unidade e uma cor branca um valor próximo de zero.

É difícil de prescrever valores precisos do *MAC* para garantir bons resultados. Geralmente, é aceite que valores *MAC* superiores a 0.9 (ou 90%) indiquem modos bem correlacionados e valores menores que 0.1 (ou 10%) indiquem modos não correlacionados. Em algumas situações, aceitam-se como limites de correlação valores acima de 80 ou abaixo de 20 por cento, respectivamente. No modelo, cujos resultados são mostrados na figura 2.5 a diagonal da matriz de resultados representa os valores de *MAC* de correlação dos modos de vibração para 5 pontos de medida ou cálculo emparelhados directamente. Os valores fora da diagonal representam a correlação entre modos de vibração associados a frequências naturais distintas.

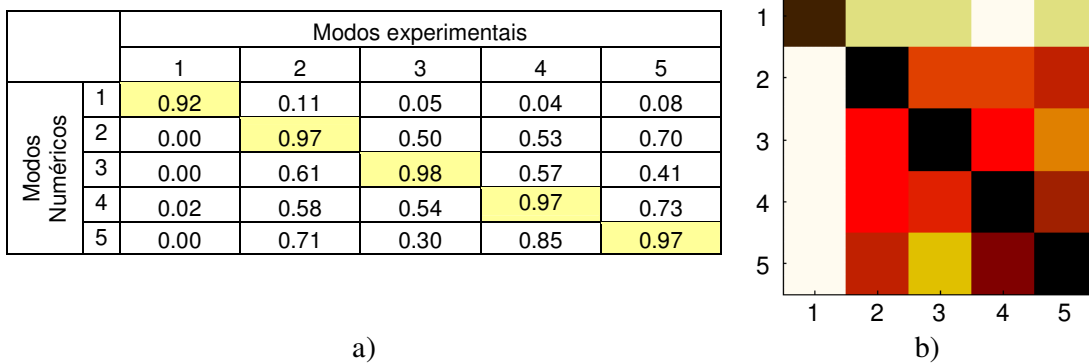


Figura 2.5 Matriz com o *MAC* de uma estrutura: a) Valores do *MAC*; b) Matriz de *MAC*

Para um modelo ideal, com modos diferentes e suficientemente separados espera-se que os valores apresentados na diagonal principal sejam unitários e que os restantes, fora da diagonal sejam nulos. Na prática isto não acontece devido a não linearidades na estrutura de teste, ruído nos dados medidos, limitações na análise modal dos dados medidos devido a insuficiente número de pontos medidos, ou escolha imprópria dos GDL incluídos na correlação. No entanto os valores elevados encontrados fora da diagonal são muito menos importantes para a avaliação da correlação dos modelos que os valores baixos possíveis de encontrar na diagonal principal. Pelo contrário, se for encontrado um valor baixo na diagonal principal e outro valor elevado fora da diagonal, mas na mesma linha da matriz *MAC*, pode-se estar na presença de emparelhamentos incorrectos. Provavelmente o emparelhamento correcto seria com um modo vizinho cujo *MAC* fora da diagonal principal apresenta um valor mais elevado. Pode-se assim assumir esta particularidade da análise *MAC* como uma propriedade com interesse para explorar e aproveitá-la para ajudar ao emparelhamento em simultâneo de modos forma e das frequências naturais.

No entanto para que esta propriedade seja aproveitada é necessário que haja algum critério na escolha dos GDL a incluir na análise. Se forem incluídos todos os GDL é expectável uma maior confiança do grau da correlação entre os dois vectores. Por exemplo, quando se utiliza um pequeno número de GDL um determinado modo obtido no modelo experimental pode-se correlacionar igualmente bem com vários dos modos do modelo numérico. O que pode estar a acontecer é um problema de coincidência de amplitudes de pontos para frequências muito diferentes que originam distorção no modo forma, que se designa como alinhamento aparente. Como há um número insuficiente de pontos medidos há dificuldade em discriminar os modos diferentes, pelo que é necessário incluir mais GDL na comparação.

Na prática, há alguma dificuldade em decidir quantos e quais os GDL necessários a incluir para evitar o problema de coincidência de pontos nos modos de vibração a frequências diferentes. Este problema é discutido em maior detalhe no capítulo 6. Pode também acontecer que a matriz de valores *MAC* não seja simétrica, uma vez que não se está a lidar com o conjunto completo de GDL do modelo. É claramente necessário incluir um número suficiente de GDL para assegurar a discriminação efectiva entre os vários modos.

Têm sido feitos outros desenvolvimentos no sentido de aperfeiçoar o processo de melhor assegurar a qualidade da informação obtida na correlação entre os modelos. São exemplos desses métodos, o *NCO* (Normalised Cross Orthogonality) (Lieven e Waters, 1994: 761-764), que é uma versão do *MAC*, afectado por uma matriz de peso que incorpora o efeito da massa normalizada, o *SEREP* (System Equivalent Reduction and Expantion Process) (O’Callahan, Avitable e Riemer, 1989:29-37), semelhante ao anterior mas utilizando uma matriz de pseudo-massa, ou uma sua variante o *SCO* (*SEREP*-Cross-Orthogonality *SCO*), ou o *IMAC* (Improved *MAC*) que permite a omissão de GDL que possam dar origem a erros (Ewins, 2000:431-433) ou ainda o *FMAC* (Frequency-scaled *MAC*) de (Friswell e Mottershead, 1995) que combina três representações gráficas numa só, tornando possível mostrar todas as características discrepantes que possibilitam fazer um julgamento sobre o grau de correlação entre os dois modelos.

Todos estes métodos têm por objectivo a obtenção de correlação dos vários GDL incluídos nos modelos, mas não apreciam explicitamente se o emparelhamento entre os modos se verifica correctamente. Há, no entanto, uma dependência espacial dos parâmetros de correlação em relação à função de cada GDL individualmente. Uma forma de examinar este grau de dependência é através do cálculo da chamada Coordenada *MAC* ou *COMAC* (Lieven e Ewins, 1988:690-695). O parâmetro *COMAC* para um GDL individual  $i$  é também um valor entre 0 e 1, adequadamente normalizado e é expresso como

$$COMAC(i) = \frac{\sum_{l=1}^L |\varphi_{R_{il}} \varphi_{A_{il}}|^2}{\sum_{l=1}^L \varphi_{R_{il}}^2 \sum_{l=1}^L \varphi_{A_{il}}^2} \quad (2.104)$$

onde,  $l$  representa correlação individual para cada par de modos do total de  $L$  disponíveis, podendo  $L$  ser um número menor que o total dos modos em ambos os conjuntos,  $m_A$  para o modelo numérico e  $m_R$  para o protótipo experimental. Se para cada par de modos a emparelhar for calculado o *COMAC* e for somada a contribuição ao longo de uma coluna da matriz de valores do conjunto de GDL incluídos na análise, então os dados que se juntam deste modo contêm informação sobre a qualidade da correlação entre vectores correctamente emparelhados. No entanto esta análise apresenta algumas dificuldades tanto para correcta interpretação dos resultados como na adequação da sua utilização aos processos numéricos (Ewins, 2000:434-437).

### 2.8.1 Afecção da Correlação entre Modelos com *ASMAC*

O *MAC* permite comparar bem os modos de vibração, mas não é sensível aos modos falsos ou às frequências naturais muito próximas, como por exemplo para dois modos num modelo simétrico. Nestes casos o *MAC* dá uma informação errada, no primeiro indicando que a correlação entre os modos é boa, sem o ser, e no segundo indicando que eles não são correlacionados quando efectivamente o que acontece é que existe uma troca de ordem nas frequências naturais correspondentes. Com o *COMAC* evitam-se estas limitações mas tem limitações de automatização. Para se conseguir um processo de emparelhamento mais correcto de dois modos forma, parte-se do princípio que os modelos em comparação são passíveis de se correlacionar. Efectivamente, deve existir um conjunto de frequências naturais em cada modelo, para o qual pelo menos algumas são correlacionáveis. Então pode-se calcular inicialmente a correlação entre os modelos seguindo a ordem crescente das frequências naturais nos dois modelos em comparação. Se o *MAC* indicar uma boa correlação nos modos de vibração associados a duas frequências naturais o número respectivo obtido na diagonal da matriz *MAC* de comparação dos modelos é muito próximo da unidade. Como se segue a ordem crescente das frequências naturais, a probabilidade de ocorrência de um modo falso é pequena e pode-se afirmar com alguma segurança que, para a frequência em análise, há uma boa correlação entre os modelos tanto em termos da frequência natural como no modo de vibração. Então, só é necessário identificar para todas as frequências em análise se o valor do número *MAC* obtido na diagonal da matriz *MAC* é unitário ou pelo menos muito próximo da unidade. Quando numa posição da diagonal *MAC* o valor encontrado não é aceitável, esta ocorrência pode ser provocada ou pela falta de semelhança entre os modos de vibração, ou pela comparação entre frequências que não são comparáveis, uma vez que pode haver um maior número de frequências naturais num dos modelos do que no outro, ou trocas de ordem. Nestes casos o número *MAC* obtido na diagonal é baixo e diz-se que os modelos nessas frequências não se correlacionam.

Mas na matriz *MAC* também existem os valores fora da diagonal principal que importa analisar. Os valores obtidos fora da diagonal *MAC* também representam correlações entre os modelos, mas em relação às frequências vizinhas de cada termo da diagonal da matriz. Pode-se aproveitar esta propriedade da matriz *MAC* para verificar se existe na vizinhança de uma frequência mal correlacionada, outra cujo número *MAC*

correspondente seja alto e portanto possa ser associado a outra frequência cujo modo de vibração melhor se correlacione com o que esteja em análise. Está claro que esta pesquisa é problemática pois se o melhor número *MAC* obtido for muito desviado do ponto da diagonal em causa, pode-se estar na presença de um modo falso. No entanto, impedindo-se que uma frequência já correlacionada seja de novo emparelhável, reduz-se consideravelmente a possibilidade de modos falsos. Por outro lado, se for criado outro mecanismo que enfraqueça o resultado do cálculo do valor do número *MAC* à medida que mais se afaste da diagonal da matriz, também se reduz a probabilidade de escolha de modos falsos. Então, resumindo, quando um conjunto de frequências inicialmente emparelhadas, não se correlacionam, podem-se procurar outras começando, por exemplo, pela vizinha imediatamente superior e verificar se o número *MAC* na matriz é próximo da unidade e, se não for, depois procurar na vizinha imediatamente inferior, de seguida, na segunda mais vizinha superior e assim sucessivamente até encontrar aquela cujo número *MAC* seja elevado desde que essa frequência ainda não tenha sido emparelhada.

Do que ficou dito, consequência da análise *MAC*, o emparelhamento entre os modelos numérico e de referência, fica mais dependente da boa correlação entre modos de vibração que entre as frequências naturais, o que leva ao emparelhamento de modos falsos. Uma solução para esta dificuldade é introduzir um critério de emparelhamento complementar ao *MAC*, designado por Alternated Search Modal Assurance Criteria (*ASMAC*), aqui proposto. Este critério não só introduz uma medida do emparelhamento entre as frequências naturais associadas a cada modo de vibração mas também quantifica a influência da qualidade dos resultados numéricos como função do número de nós utilizados para definir os modos de vibração de referência. O critério *ASMAC* é definido por

$$ASMAC_{ij} = -\frac{|\omega_{A_j} - \omega_{R_i}|}{\omega_{A_j} + \omega_{R_i}} + 0,03\sqrt{N_p} \quad (2.105)$$

onde  $\omega_{R_i}$  é a  $i^{esima}$  frequência natural do modelo de referência associada ao modo de vibração  $\phi_{R_i}$  para o qual foi calculado o valor *MAC* correspondente na diagonal principal e  $\omega_{A_j}$  é a  $j^{esima}$  frequência natural do modelo numérico, que diz respeito a cada valor da frequência natural do modelo a melhorar. O aumento do valor do *ASMAC* corresponde ao

aumento da correlação entre as frequências  $\omega_{R_i}$  e  $\omega_{A_j}$  e consequentemente entre os modelos. A segunda parcela da equação (2.105) introduz um peso aditivo no valor do critério que penaliza os casos nos quais existe um número reduzido de nós na caracterização dos modos de vibração.  $N_p$  é o número de pontos nodais utilizados para definir o modo de vibração de referência. Se  $N_p$  for muito pequeno, aumenta a probabilidade da ocorrência de modos falsos pelo que o valor da expressão *ASMAC* deve ser menos influente.

O critério *ASMAC* reforça o emparelhamento dos modos de vibração correctos minimizando a possibilidade de emparelhamento de modos correspondentes a frequências muito diversas. No entanto, nunca é demais referir que tal possibilidade ainda existe e consequentemente que a utilização deste critério numa forma automática, integrada num processo de identificação do modelo de elementos finitos não é isenta de perigos.

Para apreciar a forma como os valores *MAC* e *ASMAC* suportam o emparelhamento dos pares de valores e vectores próprios dos modelos a identificar e de referência observe-se a Tabela 2.4 na qual são apresentados alguns casos fictícios para as matrizes associadas a estes critérios. Neste exemplo obtiveram-se as 6 primeiras frequências naturais de referência, cujos valores são apresentados na primeira coluna, designados  $\omega_i^R$  e obtiveram-se também, as 12 primeiras frequências naturais numericamente  $\omega_j^A$ , representadas na primeira linha. Para possibilitar a escolha do melhor emparelhamento, é necessário utilizar um maior conjunto de frequências no modelo numérico a correlacionar para haver hipóteses de escolha.

Tabela 2.4a Efeito da primeira parcela da expressão *ASMAC*

| 0 ptos.           |       | $\omega_j^A$ (Hz) |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-------------------|-------|-------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                   |       | 87.8              | 101.1  | 108.5  | 124.5  | 164.6  | 193.4  | 195.7  | 251.3  | 279.5  | 294.0  | 298.8  | 327.4  |
| $\omega_i^R$ (Hz) | 87.7  | 0.000             | -0.071 | -0.106 | -0.173 | -0.305 | -0.376 | -0.381 | -0.483 | -0.522 | -0.540 | -0.546 | -0.577 |
|                   | 99.3  | -0.062            | -0.009 | -0.044 | -0.113 | -0.247 | -0.322 | -0.327 | -0.434 | -0.476 | -0.495 | -0.501 | -0.535 |
|                   | 217.6 | -0.425            | -0.365 | -0.335 | -0.272 | -0.139 | -0.059 | -0.053 | -0.072 | -0.125 | -0.149 | -0.157 | -0.201 |
|                   | 240.6 | -0.465            | -0.408 | -0.378 | -0.318 | -0.188 | -0.109 | -0.103 | -0.022 | -0.075 | -0.100 | -0.108 | -0.153 |
|                   | 251.2 | -0.482            | -0.426 | -0.397 | -0.337 | -0.208 | -0.130 | -0.124 | 0.000  | -0.053 | -0.078 | -0.087 | -0.132 |
|                   | 312.6 | -0.562            | -0.511 | -0.485 | -0.430 | -0.310 | -0.235 | -0.230 | -0.109 | -0.056 | -0.031 | -0.023 | -0.023 |



Tabela 2.4b Efeito da totalidade da expressão *ASMAC* utilizando 3 GDL na comparação entre modelos

| 3 ptos.           |       | $\omega_i^A$ (Hz) |              |               |               |               |               |               |              |        |        |              |        |
|-------------------|-------|-------------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|--------|--------|--------------|--------|
|                   |       | 87.8              | 101.1        | 108.5         | 124.5         | 164.6         | 193.4         | 195.7         | 251.3        | 279.5  | 294.0  | 298.8        | 327.4  |
| $\omega_j^R$ (Hz) | 87.7  | <b>0.052</b>      | -0.019       | -0.054        | -0.121        | -0.253        | -0.324        | -0.329        | -0.431       | -0.470 | -0.488 | -0.494       | -0.525 |
|                   | 99.3  | -0.010            | <b>0.043</b> | 0.008         | -0.061        | -0.195        | -0.270        | -0.275        | -0.382       | -0.424 | -0.443 | -0.449       | -0.483 |
|                   | 217.6 | -0.373            | -0.313       | <b>-0.283</b> | -0.220        | -0.087        | -0.007        | <b>-0.001</b> | -0.020       | -0.073 | -0.097 | -0.105       | -0.150 |
|                   | 240.6 | -0.413            | -0.356       | -0.326        | <b>-0.266</b> | -0.136        | -0.057        | -0.051        | <b>0.030</b> | -0.023 | -0.048 | -0.056       | -0.101 |
|                   | 251.2 | -0.430            | -0.374       | -0.345        | -0.285        | <b>-0.156</b> | -0.078        | -0.072        | <b>0.052</b> | -0.001 | -0.026 | -0.035       | -0.080 |
|                   | 312.6 | -0.510            | -0.459       | -0.433        | -0.378        | -0.258        | <b>-0.184</b> | -0.178        | -0.057       | -0.004 | 0.021  | <b>0.029</b> | 0.029  |

Tabela 2.4c Efeito da totalidade da expressão *ASMAC* utilizando 20 GDL na comparação entre modelos

| 20 ptos.          |       | $\omega_i^A$ (Hz) |              |               |               |               |               |              |              |        |        |              |        |
|-------------------|-------|-------------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|--------------|--------|--------|--------------|--------|
|                   |       | 87.8              | 101.1        | 108.5         | 124.5         | 164.6         | 193.4         | 195.7        | 251.3        | 279.5  | 294.0  | 298.8        | 327.4  |
| $\omega_i^R$ (Hz) | 87.7  | <b>0.134</b>      | 0.063        | 0.028         | -0.039        | -0.171        | -0.242        | -0.247       | -0.348       | -0.388 | -0.406 | -0.412       | -0.443 |
|                   | 99.3  | 0.073             | <b>0.125</b> | 0.090         | 0.022         | -0.113        | -0.187        | -0.193       | -0.299       | -0.342 | -0.361 | -0.367       | -0.400 |
|                   | 217.6 | -0.291            | -0.231       | <b>-0.200</b> | -0.138        | -0.005        | 0.075         | <b>0.081</b> | 0.062        | 0.010  | -0.015 | -0.023       | -0.067 |
|                   | 240.6 | -0.331            | -0.274       | -0.244        | <b>-0.184</b> | -0.054        | 0.025         | 0.031        | <b>0.112</b> | 0.059  | 0.034  | 0.026        | -0.019 |
|                   | 251.2 | -0.348            | -0.292       | -0.263        | -0.203        | <b>-0.074</b> | 0.004         | 0.010        | <b>0.134</b> | 0.081  | 0.056  | 0.048        | 0.002  |
|                   | 312.6 | -0.427            | -0.377       | -0.351        | -0.296        | -0.176        | <b>-0.101</b> | -0.096       | 0.025        | 0.078  | 0.103  | <b>0.112</b> | 0.111  |

Na tabela 2.4a mostram-se os resultados da primeira parcela da função *ASMAC* para cada par de emparelhamento. Pela análise da tabela, verifica-se uma boa semelhança entre as duas primeiras frequências. Neste caso o maior valor obtido do cálculo da primeira parcela surge precisamente no relacionamento entre estas duas frequências. Já para a terceira frequência, 217,6 Hz, a frequência obtida no modelo numérico que melhor se aproxima é a sétima, com o valor de 195,72 Hz, muito longe da com quem deveria emparelhar directamente que apresenta apenas um valor de 108,5 Hz. Neste caso a diferença entre os valores da primeira parcela *ASMAC* é de  $-(0,33457 - 0,05294) = -0,28163$  que vai afectar directamente o valor do *MAC* calculado no emparelhamento dos respectivos modos de vibração, privilegiando fortemente o emparelhamento nas frequências de valor mais próximo. No gráfico mostrado na figura 2.6. apresentam-se as curvas representativas da primeira parcela da função *ASMAC* onde se confirma que o desenvolvimento de cada curva tende sempre a favorecer o emparelhamento entre as frequências mais próximas.

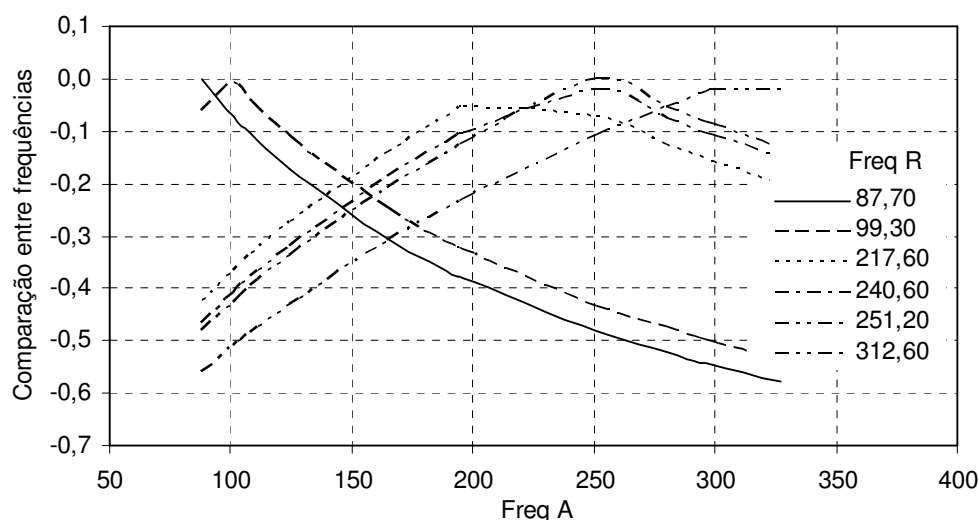


Figura 2.6 Representação do efeito da primeira parcela da expressão *ASMAC* sobre cada elemento da matriz *MAC*

Mas, se o número de GDL envolvidos na análise for muito pequeno, a confiança na qualidade deste emparelhamento, com uma frequência bastante desviada da ordem esperada, é reduzida, pois pode corresponder a um modo de vibração falso. Se, por exemplo, apenas forem utilizados 3 GDL, a probabilidade de que nos resultados do *MAC* surjam valores que correlacionem bem várias frequências naturais que não devam ser correlacionáveis é maior. Assim, diminui consideravelmente a confiança na influência da primeira parcela do *ASMAC*, pelo que, será de corrigir esse valor com outra parcela que informe da qualidade do modelo em causa. Essa parcela é segunda parcela da expressão do *ASMAC*.

Na figura 2.7 mostra-se o efeito da segunda parcela do *ASMAC* em função do número de pontos (GDL) envolvidos na análise. Quanto maior for o número de pontos envolvidos maior será a probabilidade de que o emparelhamento de uma frequência muito deslocada da ordem esperada possa representar correctamente o par modal entre os modelos.

Nas tabelas 2.4b e 2.4c apresentam-se os valores da função *ASMAC* completa, considerando, no primeiro caso que a análise envolveu 3 GDL e no segundo 20 GDL, no mesmo modelo. No caso do modelo com 20 GDL o valor resultante da função *ASMAC* é bastante superior, contribuindo positivamente para que o emparelhamento obtido através

do *MAC* entre os modos de vibração não corresponda a um emparelhamento de modos falsos.

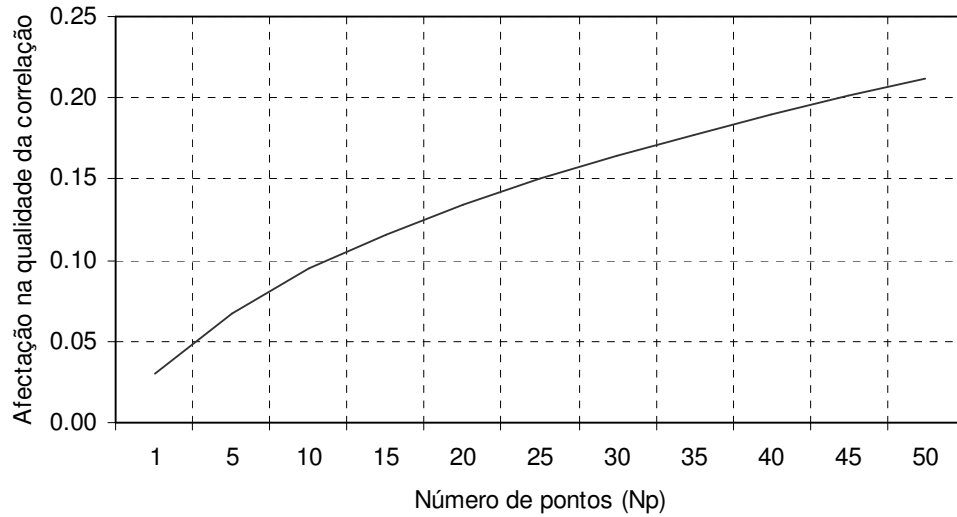


Figura 2.7 Representação do efeito da segunda parcela da expressão *ASMAC* sobre cada elemento da matriz *MAC*

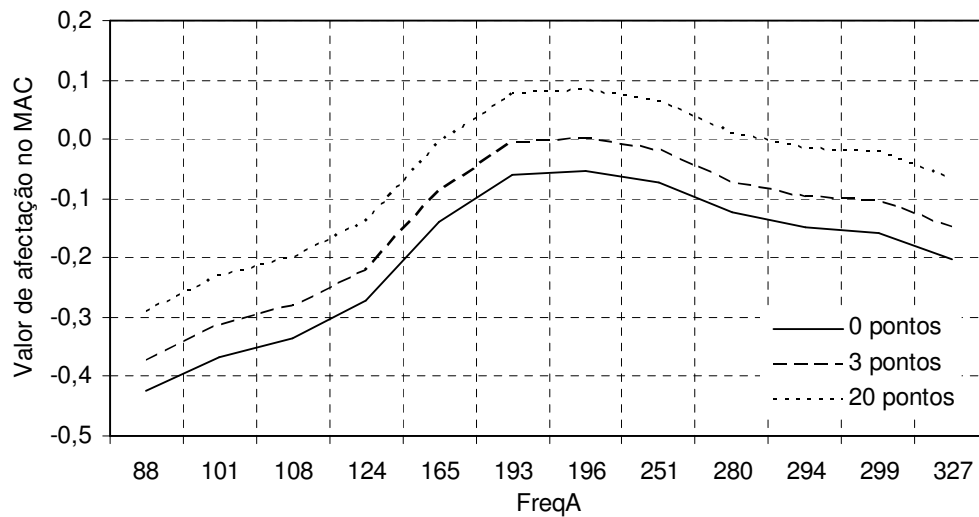


Figura 2.8 Representação do critério *ASMAC* para uma frequência de referência de 217.6 Hz na gama de frequências do modelo de elementos finitos

Os valores do *ASMAC* apresentados na Figura 2.8 mostram o emparelhamento entre a frequência de  $\omega_{R_i} = 217.6$  Hz e a gama de frequências naturais do modelo de elementos finitos para o qual os modos de vibração de referência são obtidos com 3 e 20 pontos

respectivamente. O caso com  $N_p=0$  corresponde simplesmente à primeira parcela da equação (2.105).

## 2.9 Sumario e Discussão

O principal objectivo deste capítulo foi abordar os problemas que a FEM ainda possui na sua aplicação prática devido às suas limitações. Para isso, introduziram-se os conceitos fundamentais de dinâmica de estruturas associados à análise modal e fez-se uma abordagem sumária ao FEM. Em particular abordaram-se as funções de forma empregues nos modelos que utilizam elementos de viga e de placa e casca. O objectivo foi permitir uma mais fácil compreensão das consequentes dificuldades a que o método está associado. Abordou-se em especial o código de elementos finitos ANSYS e verificou-se que os FEM ainda possuem limitações na sua aplicação o que motiva a necessidade de confirmação dos resultados através de ensaios experimentais para validação de modelos.

Apresentaram-se vários métodos de comparação de resultados entre os modelos estudados numericamente e experimentalmente, com ênfase no *MAC*, discutindo-se no processo a sua aplicabilidade e limitações. Uma vez comparados os resultados entre os modelos, é necessário correlacioná-los. Foi visto que a correlação deve ser feita tanto a nível dos modos de vibração como das frequências naturais a estes associadas. A nível dos modos de vibração, o *MAC* é um bom correlacionador, mas é omissos na avaliação da correlação em termos de frequências. Foi desenvolvido um novo modelo complementar da análise, o *ASMAC*. Este afectando o valor do *MAC* permite introduzir o efeito tanto do emparelhamento da frequência natural que melhor se associa a cada modo de vibração, como também na influência da qualidade do resultado da análise em função da qualidade do modelo, no que respeita ao número de GDL envolvidos. Com esta nova forma de análise é possível identificar melhor o emparelhamento entre os modos calculados e medidos e possibilitar a automatização do procedimento. Permite ainda aplicar procedimentos de reconciliação subsequentes para aproximação entre os modelos que possibilitam o seu melhoramento, partindo das discrepâncias iniciais entre os parâmetros fundamentais.

No entanto, é recomendável que, principalmente nos casos mais complexos, sejam feitas interpretações adequadas dos indicadores obtidos e sobre eles seja feita uma análise

crítica. Foram salientados os principais perigos devidos à simplificação demasiada dos modelos ou das conclusões precipitadas tiradas de resultados escassos.



## **CAPÍTULO 3 – OPTIMIZAÇÃO DO PROBLEMA DE VIBRAÇÃO**

A competitividade do mundo actual é o resultado da evolução do conhecimento traduzido no binómio do bem-fazer e redução de custos, o que induz a procura de melhores soluções. Para atingir tais objectivos é fundamental o recurso crescente a ferramentas de optimização que constituem instrumentos muito poderosos para o desenvolvimento de melhores projectos. Com a evolução do cálculo estrutural por elementos finitos aplicado a estruturas complexas, os programas requerem recursos computacionais elevados, de difícil compatibilidade com a necessidade de resoluções rápidas e fiáveis. Por outro lado a modelação de sistemas mais complexos requer, normalmente, simplificações que conduzem a insegurança nos resultados. Por exemplo, muitos componentes normalizados, como as ligações na montagem de estruturas, são apresentados de uma forma simbólica, pelo que, na sua conversão para os programas de FEM ou são omitidos ou são assumidos como ligações rígidas. A identificação das características mecânicas destes componentes, ainda que mantendo a sua modelação simplificada, é de fundamental importância. Neste capítulo utilizam-se técnicas de optimização com o fim de melhorar modelos simplificados de elementos finitos.

### 3.1 Introdução

A disponibilidade de computadores pessoais, cada vez mais poderosos e o desenvolvimento de novos algoritmos têm, possibilitado a comercialização de ferramentas informáticas bastante flexíveis e robustas nas quais se encontram implementados algoritmos de optimização. O MATLAB (2002) é um ambiente de programação que se baseia numa linguagem simples e acessível mas poderosa em termos matemáticos. Uma das suas muitas vantagens consiste na implementação das várias técnicas de optimização que estão disponíveis para utilização. Assim, o programa MATLAB é utilizado para apoiar um dos objectivos deste trabalho que consiste na aplicação das técnicas existentes de optimização ao melhoramento de modelos de elementos finitos para a dinâmica de estruturas. Neste sentido os programas MATLAB e ANSYS são utilizados de forma sequencial, cabendo ao MATLAB o controlo do processo e ao ANSYS o cálculo dos modos de vibração e das frequências naturais da estrutura.

Faz-se aqui uma abordagem dos principais algoritmos de optimização que se adaptam aos objectivos deste trabalho e que estão incluídos no programa MATLAB, no seu pacote de ferramentas de optimização. No processo de apresentação destes algoritmos são apresentados os princípios matemáticos envolvidos assim como as condições necessárias à formulação do algoritmo de controlo do optimizador escolhido, em função dos objectivos pretendidos.

### 3.2 Métodos de Optimização

A compreensão da fundamentação matemática que está envolvida nos problemas de optimização é essencial para o estabelecimento de condições a satisfazer para a obtenção da solução óptima. Assim as técnicas de optimização são usadas para encontrar um conjunto de parâmetros,  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ , que podem, em determinadas condições, ser definidos como óptimos. Estes parâmetros correspondem às variáveis do projecto, que podem ser mudados dentro de um campo predefinido. Num problema de optimização a função objectivo,  $f(\mathbf{x})$ , que define as condições de dependência do projecto em relação às suas variáveis, é submetido a um processo de minimização ou maximização e pode ser sujeita a constrangimentos do tipo igualdade ou desigualdade. Os constrangimentos são



funções que representam restrições das variáveis de projecto. As funções de constrangimento podem ser do seguinte tipo:

$$g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (i = 1, \dots, m_e); \text{ com } m_e \text{ constrangimentos de igualdade,}$$

$$h_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, m_f); \text{ com } m_f \text{ constrangimentos de desigualdade e/ou}$$

$$x_k^l, x_k^u \quad (k = 1, \dots, m_a); \text{ com } m_a \text{ constrangimentos de limite inferior ou superior.}$$

Um problema de optimização na sua forma geral (PG), é descrito da seguinte forma:

$$\min f(\mathbf{x}) \tag{3.11}$$

sujeito a :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq 0$$

$$\mathbf{x}^l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^u$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vector dos parâmetros de projecto ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ) e  $f(\mathbf{x})$  é a função objectivo que descreve o problema.

Uma solução eficiente e precisa para este problema não depende apenas do tamanho do problema, em termos do número de constrangimentos e variáveis de projecto, mas também das características das funções objectivo e de constrangimento. Quando ambas são funções lineares das variáveis de projecto o problema é designado por um problema de programação linear (PL). Quando se trata da minimização ou maximização de uma função objectivo quadrática, que é constrangida linearmente, então o problema designa-se por programação quadrática (PQ). Para ambos os problemas, PL e PQ, estão disponíveis procedimentos numéricos para a obtenção da solução. No primeiro caso (PL) a técnica numérica mais conhecida é o método simplex, baseado no algoritmo de Dantzig (Chong, 2001: 256), no segundo caso (PQ) usam-se algoritmos de programação quadrática, baseados também nas técnicas de optimização linear.

Mais difícil de resolver é o problema de programação não linear (PNL), no qual a função objectivo e os constrangimentos podem ser funções não lineares das variáveis de projecto. A solução do PNL requer geralmente um procedimento iterativo para estabelecer a direcção de procura para cada iteração, conseguido normalmente através da solução de um problema de programação linear ou de um de programação quadrática ou ainda de um problema de optimização não restringido.

As funções  $f(\mathbf{x})$  que descrevem a dependência do objectivo do projecto em relação às suas variáveis, tais como os módulos de elasticidade, densidades materiais ou propriedades geométricas das peças, são geralmente de comportamento não linear. Aliás, mesmo que apenas uma das funções apresente comportamento não linear, é suficiente para identificar todo o conjunto como sendo da classe de problemas de programação não linear (PNL). Importa então aprofundar um pouco mais os conceitos matemáticos e numéricos envolvidos na PNL. Começa-se esta abordagem pela análise de problemas não restringidos seguindo-se os restringidos, que requerem métodos de solução mais elaborada.

### 3.2.1 Optimização não Constrangida

Existe um vasto conjunto de métodos para optimização não restringida. Estes, de uma forma geral, são agrupados de acordo com a utilização, ou não, da derivada da função objectivo, se esta existir. Os métodos de procura que usam apenas funções de avaliação, como por exemplo o método simplex de Nelder e Mead (Mathews, 1999: 405), são os mais adequados para problemas claramente não lineares, com elevado número de descontinuidades. Os métodos que utilizam gradientes são geralmente mais eficientes quando a função a ser minimizada tem a sua primeira derivada contínua. Os métodos de ordem elevada, como o método de Newton (Chong, 2001:142-145), só são interessantes quando a segunda derivada da função é fácil de calcular analiticamente. Isto porque o cálculo da função de segunda ordem, usando diferenciação numérica, é complicado e extenso.

Os métodos de gradiente usam a derivada da função objectivo para detectar a direcção de procura do ponto onde o mínimo se vai localizar. O mais simples destes métodos é o de steepest descent (Chong, 2001: 115), no qual a procura é feita na direcção,

$-\nabla f(\mathbf{x})$ , onde  $\nabla f(\mathbf{x})$  é o gradiente da função objectivo. Este método é pouco eficiente quando a função a minimizar tem descontinuidades acentuadas pois que a optimização torna-se demorada exigindo muitas iterações, mesmo quando a solução ainda está a uma distância considerável do objectivo, o mínimo da função.

Dos métodos que usam a informação de gradiente, os mais usados são os métodos Quasi-Newton (Venkataraman, 2002: 247). Nestes métodos a informação da curvatura em cada iteração é organizada de maneira a formar-se uma aproximação quadrática do problema original (Arora, 2004: 402):

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = a + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} \quad (3.12)$$

onde a Hessian,  $\mathbf{H}$ , é uma matriz simétrica positiva definida,  $\mathbf{b}$  é um vector constante e  $a$  uma constante. A solução óptima para este problema, ocorre quando as derivadas parciais de  $\mathbf{x}$  tendem para zero, isto é,

$$\nabla f(\mathbf{x}^\dagger) = \mathbf{b} + \mathbf{H} \mathbf{x}^\dagger = 0 \quad (3.13)$$

O ponto da solução óptima,  $\mathbf{x}^\dagger$ , pode ser assim escrito como

$$\mathbf{x}^\dagger = -\mathbf{b} \mathbf{H}^{-1} \quad (3.14)$$

Os métodos tipo Newton (Arora, 2004: 318), contrariamente aos Quasi-Newton, calculam  $\mathbf{H}$  directamente e progridem no sentido descendente até localizarem o mínimo após um número assinalável de iterações. O cálculo numérico de  $\mathbf{H}$ , envolve um elevado tempo de processamento, enquanto que os Quasi-Newton, de uma forma mais simples, usam o desenvolvimento de  $f(\mathbf{x})$  e  $\nabla f(\mathbf{x})$ , para obter a forma da curvatura, e assim obter uma aproximação da matriz hessiana  $\mathbf{H}$ .

Um grande número de métodos para obter melhores aproximações de  $\mathbf{H}$  têm sido desenvolvidos. A fórmula de BFGS (Chong, 2001: 180), é referida (Venkataraman, 2002: 249) como sendo a mais eficiente na generalidade dos casos, pelo que é a mais utilizada pela generalidade dos métodos Quasi-Newton.

A fórmula da melhoria do Hessian proposta por BFGS é

$$\mathbf{H}_{k+1}^{BFGS} = \mathbf{H}_k + \frac{\Delta_g^{(k)} \Delta_g^{(k)T}}{\Delta_g^{(k)T} \Delta_x^{(k)}} - \frac{\mathbf{H}_k^T \Delta_x^{(k)T} \Delta_x^{(k)} \mathbf{H}_k}{\Delta_x^{(k)T} \mathbf{H}_k \Delta_x^{(k)}} \quad (3.15)$$

onde:

$$\Delta_x = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \text{ na iteração } k$$

$$\Delta_g = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k)$$

Inicialmente,  $\mathbf{H}_0$  pode ser a matriz identidade  $\mathbf{I}$ . Para evitar a inversão da  $\mathbf{H}$ , pode-se usar esta fórmula para obter um melhoramento que evite a inversão directa de  $\mathbf{H}$ , por uma aproximação da Hessian à inversa  $\mathbf{H}^{-1}$ , em cada iteração. Uma fórmula alternativa é a DFP (Venkataraman, 2002: 246-249) de Davion, Fletcher, e Powell, semelhante ao método BFGS, equação (3.15), excepto o  $\Delta_g$  que é trocado por  $\Delta_x$ . No entanto a fórmula de BFGS é normalmente mais eficiente.

O cálculo do gradiente faz-se analiticamente ou através de derivadas parciais usando um método de diferenciação numérica por diferenças finitas. Para gradientes por diferenças finitas faz-se uma perturbação em cada variável de projecto,  $x$ , e calcula-se a razão de variação na função objectivo. Esta avaliação é feita à função objectivo com o objectivo de se obter o mínimo da função dentro do intervalo estipulado pelo incremento das variáveis previstas no problema.

Concluída a avaliação da função, a metodologia prossegue de volta à iteração principal,  $k$ , numa linha de procura que é a direcção dada por

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{H}_k^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (3.16)$$

Este método é capaz de seguir a forma de uma função, mesmo com uma concavidade elevada, e convergir para um mínimo após uma relativamente pequena quantidade de análises da função a avaliar, utilizando apenas diferenças finitas.

Outro aspecto da análise da função de optimização é a procura do sentido de deslocação da solução estimada. De uma forma geral, os métodos de optimização usam a solução de subproblemas mesmo nos problemas constrangidos, para a determinação da

direcção de procura. O comprimento mínimo da linha formada, a partir de um ponto determinado, na direcção de procura calcula-se geralmente usando um procedimento de procura, como o de ‘Golden Section’ (Chong, 2001: 91) ou o de Fibonacci, (Chong, 2001: 95) ou ainda através de um método polinomial envolvendo interpolação, como por exemplo a interpolação quadrática ou cúbica. Os métodos polinomiais interpolam um número de pontos com uma curva polinomial de uma só variável, cujo mínimo pode ser facilmente calculado. A interpolação faz-se nas condições permitidas para o mínimo, isto é, o mínimo fica localizado numa zona próxima dos pontos disponíveis da curva. Os métodos de interpolação não são, geralmente, fiáveis para estimar o mínimo nas funções não lineares. Contudo, eles são úteis para estimar os incrementos às variáveis quando se está a tentar o mínimo permitido pela função. Os métodos de interpolação polinomial são geralmente mais eficientes quando a função de optimização a ser minimizada é contínua. O problema que se coloca é o de encontrar uma nova iteração  $\mathbf{x}_{k+1}$  (Chong, 2001: 109) ou seja,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha^k \mathbf{d}_k \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{x}_k$  representa a iteração em curso,  $\mathbf{d}_k$  é o vector da direcção de procura obtida por um método apropriado, e  $\alpha^k \geq 0$  é um parâmetro escalar de incremento que representa a distância até ao mínimo.

O método de interpolação quadrática envolve um conjunto próprio de valores para uma função de uma variável da seguinte forma

$$m_q(\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^2 \quad (3.18)$$

onde o extremo ocorre para um incremento de:

$$\alpha = \frac{-b}{2c} \quad (3.19)$$

Este ponto pode ser um mínimo ou um máximo da função. É um mínimo quando o coeficiente  $a$  é positivo e a interpolação atinge o objectivo num ponto possível. A determinação dos coeficientes  $b$  e  $c$  é feita usando uma combinação de gradientes ou de avaliações de função.

A utilização de interpolação cúbica, é útil quando a informação de gradiente é conhecida ou quando são calculadas mais de três avaliações de função. Esta forma de interpolação tem a seguinte forma:

$$m_c(\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 \quad (3.20)$$

onde os extremos locais são, neste caso, as raízes da equação quadrática:

$$b + 2c\alpha + 3d\alpha^2 = 0$$

Para encontrar o valor mínimo, selecciona-se a raiz  $2c + 6d\alpha$ , que é sempre positiva. Os coeficientes  $c$  e  $d$  determinam-se usando qualquer combinação de quatro gradientes, avaliações da função ou, alternativamente, com três avaliações de gradientes. Os coeficientes são calculados através de um conjunto de equações lineares simultâneas.

A implementação do algoritmo Quasi-Newton desenvolve-se em duas fases. Na primeira fase determina-se a direcção de procura pelos métodos BFGS ou DFP, para um melhoramento da matriz Hessiana. Na segunda fase procede-se à procura da direcção utilizando o método de interpolação cúbica, se o gradiente for determinável, ou um método misto de interpolação cúbica e quadrática se o gradiente não for determinável. O objectivo é, em cada iteração, encontrar 3 pontos que contenham o mínimo e usar a interpolação cúbica para estimar o mínimo de cada procura da direcção.

### 3.2.2 Optimização Constrangida

Na optimização constrangida, em geral, transforma-se o problema num subproblema de mais fácil análise que é resolvido e usado como base um processo iterativo. Métodos clássicos que usam uma função de penalidade (Chong, 2001: 445) para eliminar valores fora dos limites de constrangimento, numa sequência de iterações parametrizadas que convergem para o problema restringido, são considerados actualmente relativamente ineficientes. Estes métodos foram substituídos por outros que se baseiam em soluções das equações de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (Arora, 2004: 175). As equações de KKT são condições necessárias para a optimização num problema de optimização constrangida. Se o problema é do tipo de programação convexa, isto é,  $f(\mathbf{x})$  e  $g_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , são

funções convexas, então as equações de KKT são ambas necessárias e suficientes para uma solução global (Arora, 2004: 566).

No PG, (3.11), as equações KKT (Arora, 2004: 176) são estabelecidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^\oplus) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^{\oplus T} \nabla g_i(\mathbf{x}^\oplus) &= 0 \\ \lambda_i^{\oplus T} \nabla g_i(\mathbf{x}^\oplus) &= 0 \quad i = 1, \dots, m_e \\ \lambda_i^{\oplus} &\geq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m_f \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde  $\mathbf{x}^\oplus$  representa um ponto regular de um conjunto possível no espaço do projecto, que satisfaz os constrangimentos. A primeira equação descreve a perpendicularidade dos gradientes da função objectivo e os constrangimentos activos, no ponto onde ocorre a solução. No domínio dos gradientes a serem anulados com os multiplicadores de Lagrange,  $(\lambda_i, i = 1, \dots, m_f)$  é necessário balancear os desvios em amplitude da função objectivo e os gradientes dos constrangimentos. Aos constrangimentos não activos estão associados multiplicadores de Lagrange nulos, o que está implícito nas duas últimas equações de (3.11).

A solução das equações de KKT que forma a base de muitos algoritmos de programação não linear, baseia-se directamente no cálculo dos multiplicadores de Lagrange. Como os métodos quasi-Newton constrangidos convergem rapidamente utilizam-se para obter resultados de segunda ordem em relação às equações de KKT, usando um procedimento de melhoramento quasi-Newton. Estes métodos são normalmente conhecidos como métodos de Programação Sequencial Quadrática (PSQ) e recorrem a um subproblema de programação quadrática (PQ) que é resolvido para cada iteração principal. O método PSQ representa o estado da arte em termos de programação não linear. Schittkowski (Arora, 2004: 406), por exemplo, implementou e testou um método que, através do melhoramento de outros métodos, permite simular com boa aproximação o método de Newton para optimização constrangida, tal como este faz para a optimização não constrangida.

Em cada iteração principal, faz-se uma aproximação da matriz Hessiana da função Lagrangeana usando um método de melhoramento quasi-Newton. Gera-se então um subproblema de PQ cuja solução é usada para formar uma direcção de procura num procedimento de procura em linha.

Para uma melhor percepção do processo de optimização, descrevem-se de seguida, de uma forma geral, os procedimentos envolvidos no método PSQ. A descrição detalhada deste método é feita por Venkataraman (2002: 289) e por Arora (2004: 404). Dado o problema descrito por PG através da equação (3.11), a principal ideia é formular um subproblema PQ baseado numa aproximação quadrática da função Lagrangeana (Arora, 2004: 126, 400).

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x}) \quad (3.22)$$

A partir da equação (3.11) e assumindo que os constrangimentos limite  $g_i$  são expressos por inequações de constrangimento, o subproblema de PQ obtém-se linearizando os constrangimentos não lineares, resultando em:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}_k \mathbf{d} + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d} \\ \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}_k) &= 0 \quad i = 1, \dots, m_e \\ \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}_k) &\leq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.23)$$

Este sub problema é resolvido usando por exemplo o algoritmo PQ. A solução é utilizada para formar uma nova iteração do tipo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$$

onde se aplica um procedimento de procura para determinar o parâmetro de incremento  $\alpha_k$  logo que um decréscimo suficiente numa função de mérito seja obtida por melhoria da matriz Hessiana. A matriz  $\mathbf{H}_k$ , que é uma aproximação positiva da matriz Hessiana da função Lagrangeana, equação (3.22), é melhorada pelo método BFGS, ou por qualquer dos métodos quasi-Newton.



O método PSQ, utilizado em problemas constringidos não lineares requer normalmente, menos iterações que nos problemas não constringidos. Tal deve-se a que nos limites da área executável o otimizador pode tomar decisões tendo em conta as direcções de procura e os comprimentos dos incrementos. A implementação do método PSQ faz-se em três fases principais: melhoria da matriz Hessiana da função Lagrangeana, resolução do problema por programação quadrática e finalmente pesquisa de linha e cálculo da função de mérito.

Para a implementação da melhoria da matriz Hessiana calcula-se uma aproximação quasi-Newton positiva, da função Lagrangeana,  $\mathbf{H}$ , usando o método BFGS para cada iteração principal, ou seja,

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\Delta_g^{(k)} \Delta_g^{(k)T}}{\Delta_g^{(k)T} \Delta_x^{(k)}} - \frac{\mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k}{\Delta_x^{(k)T} \mathbf{H}_k \Delta_x^{(k)}} \quad (3.24)$$

onde  $\Delta_x = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$

$$\Delta_g^{(k)} = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}_{k+1}) - \left( \nabla f(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}_k) \right).$$

e  $\lambda_i (i=1, \dots, m)$  é uma estimativa dos multiplicadores de Lagrange. Em cada iteração, procura-se que o produto  $\Delta_g^{(k)T} \Delta_x^{(k)}$  seja positivo, de forma a obter-se uma Hessiana positivo. Quando  $\Delta_g^{(k)T} \Delta_x^{(k)}$  não é positivo, modifica-se  $\Delta_g^{(k)}$  elemento a elemento até que  $\Delta_g^{(k)T} \Delta_x^{(k)}$  o seja. Com esta modificação,  $\Delta_g^{(k)}$  torna-se cada vez menor até um limite  $\Delta_g^{(k)T} \Delta_x^{(k)}$  seja maior ou igual que  $10^{-5}$ . Se  $\Delta_g^{(k)T} \Delta_x^{(k)}$  continuar a não ser positivo, mesmo depois das transformações ocorridas, adiciona-se a  $\Delta_g^{(k)}$  um vector  $\kappa$  multiplicado por uma constante escalar  $\vartheta$ , da seguinte forma:

$$\Delta_g^{(k)} = \Delta_g^{(k)} + \vartheta \kappa \quad (3.25)$$

onde

$$\kappa_i = \nabla g_i(\mathbf{x}_{k+1}) g_i(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla g_i(\mathbf{x}_k) g_i(\mathbf{x}_k),$$

$$\text{se } \left( \Delta_g^{(k)} \right)_i \vartheta < 0 \quad \text{e}$$

$$\left( \Delta_g^{(k)} \right)_i \left( \Delta_x \right)_i < 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\kappa_i = 0$$

e aumenta-se  $\vartheta$  sistematicamente até que o produto  $\Delta_g^{(k)T} \Delta_x^{(k)}$  se torne positivo. Concluída esta fase, para a obtenção da solução do problema de programação quadrática, em cada iteração principal do método PSQ, é resolvido um problema de PQ da seguinte forma (Arora, 2004: 383):

$$\min_{\mathbf{d} \in \mathcal{R}^n} \mathbf{q}(\mathbf{d}) = \mathbf{b}^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} \quad (3.26)$$

$$A_i \mathbf{d} = \mathbf{a}_i \quad i = 1, \dots, m_e$$

$$A_i \mathbf{d} \leq \mathbf{a}_i \quad i = m_e + 1, \dots, m_f,$$

onde  $A_i$  se refere à  $i^{\text{ésima}}$  linha da matriz  $\mathbf{A}$ , de dimensão  $m$  por  $n$ ,  $\mathbf{a}_i$  é um vector constante de dimensões  $m_e$  e  $m_f$  respectivamente e  $\mathbf{d}$  é o vector direcção de procura desconhecido. Para resolver este problema usa-se um método de projecção, semelhante ao descrito por Gil e outros (Arora, 2004: 383), e os resultados vão sendo modificados pelos métodos, PL e PQ.

O procedimento é dito activo dada a sua interactividade permanente e está envolvido em duas fases para a obtenção da solução. Primeiro é calculado um ponto admissível, se a solução existir. Depois gera-se uma sequência de pontos admissíveis iterativamente de forma que convirjam para a solução. Assim, um conjunto activo  $\bar{\mathbf{A}}_k$  é mantido como uma estimativa dos constrangimentos activos, isto é, funcionam como constrangimentos fronteira, no ponto da solução.  $\bar{\mathbf{A}}_k$  é melhorado a cada iteração  $k$  e é usado na determinação da direcção de procura designada  $\hat{\mathbf{d}}_k$  (diferente da  $\mathbf{d}_k$  nas iterações principais do método PSQ). Os constrangimentos de igualdade permanecem sempre em

cada conjunto activo  $\bar{\mathbf{A}}_k$ . A direcção de procura  $\hat{\mathbf{d}}_k$  é usada para minimizar a função objectivo.

Forma-se agora uma matriz  $\mathbf{Z}_k$ , por decomposição da matriz  $\bar{\mathbf{A}}_k^T$ , base para o sub espaço executável de  $\hat{\mathbf{d}}_k$  que dá origem à formação de uma direcção de procura dentro da fronteira dos constrangimentos activos (Arora, 2004: 409). Com  $\mathbf{Z}_k$ , é pesquisada uma nova direcção de procura  $\hat{\mathbf{d}}_k$  no sentido de minimizar  $q(\mathbf{d})$ , onde  $\hat{\mathbf{d}}_k$  é uma combinação linear de colunas de  $\mathbf{Z}_k$ ,  $\hat{\mathbf{d}}_k = \mathbf{Z}_k \mathbf{p}$  para o mesmo vector  $\mathbf{p}$ .

Usando a programação quadrática em função de  $\mathbf{p}$  e substituindo por  $\hat{\mathbf{d}}_k$ , obtém-se:

$$q(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{Z}_k^T \mathbf{H} \mathbf{Z}_k \mathbf{p} + \mathbf{b}^T \mathbf{Z}_k \mathbf{p} \quad (3.27)$$

Diferenciando esta expressão em relação aos campos  $\mathbf{p}$ , obtém-se:

$$\nabla q(\mathbf{p}) = \mathbf{Z}_k^T \mathbf{H} \mathbf{Z}_k \mathbf{p} + \mathbf{Z}_k^T \mathbf{b} \quad (3.28)$$

onde  $\nabla q(\mathbf{p})$  é o gradiente projectado da função quadrática dado que está projectado na superfície definida por  $\mathbf{Z}_k$  e o termo  $\mathbf{Z}_k^T \mathbf{H} \mathbf{Z}_k$  é chamado a Hessiana projectado. A solução do sistema de equações lineares é dada por:

$$\mathbf{Z}_k^T \mathbf{H} \mathbf{Z}_k \mathbf{p} = -\mathbf{Z}_k^T \mathbf{b} \quad (3.29)$$

que representa o mínimo da função  $q(\mathbf{p})$  no sub espaço definido por  $\mathbf{Z}_k$  e ocorre quando  $\nabla q(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ . Um incremento toma então a forma:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \hat{\mathbf{d}}_k \quad \text{onde} \quad \hat{\mathbf{d}}_k = \mathbf{Z}_k \mathbf{p} \quad (3.30)$$

em que  $\alpha$  é factor de incremento. Como a função objectivo é de natureza quadrática,  $\alpha$ , pode tomar apenas dois valores em cada iteração. Um valor na direcção da unidade  $\hat{\mathbf{d}}_k$  para o mínimo da função restringida no espaço nulo de  $\bar{\mathbf{A}}_k$ , sem violação dos constrangimentos, corresponde a solução do PQ. O outro valor na direcção da unidade  $\hat{\mathbf{d}}_k$ ,

mas na proximidade constrangida, sendo menor que a unidade, origina um novo constrangimento que é incluído no conjunto activo da próxima iteração.

Quando o mínimo não é encontrado, após  $n$  constrangimentos independentes incluídos num conjunto activo, calculam-se os multiplicadores de Lagrange,  $\lambda_k$ , de forma a que satisfaçam o seguinte conjunto não singular de equações lineares

$$\bar{\mathbf{A}}_k^T \boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{b} \quad (3.31)$$

sendo  $\mathbf{x}_k$  a solução óptima de PQ, se todos os elementos de  $\boldsymbol{\lambda}_k$  são positivos. No caso contrário, o elemento correspondente é apagado do conjunto activo seguindo-se nova iteração, quando o componente de  $\boldsymbol{\lambda}_k$  é negativo e o componente não corresponda a uma equação constrangida.

Para a inicialização do algoritmo é necessário um ponto admissível, obtido pelo método PSQ. Se não existir, então pode procurar-se um ponto resolvendo o problema de programação linear:

$$\min \quad \gamma$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{x} = a_i \quad i = 1, \dots, m_e \quad (3.32)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{x} - \gamma \leq a_i \quad i = m_e + 1, \dots, m_f,$$

onde  $\mathbf{A}_i$  indica a  $i^{\text{ésima}}$  linha da matriz  $\mathbf{A}$ . Partindo de um valor inicial  $\mathbf{x}$  que satisfaça as equações de constrangimentos e utilizando a equação (3.22) encontra-se um ponto admissível, caso exista, resolvendo um conjunto de equações lineares abaixo ou acima, partindo de um conjunto de equações constrangidas. Se existir uma solução para este problema, então a variável fraca  $\gamma$  é o conjunto de inequações de constrangimento máximo neste ponto. Com o objectivo de resolver este problema de PL, pode-se utilizar o algoritmo de PQ modificando-o. Ajustando a direcção de procura dos incrementos na direcção descendente,

$$\hat{\mathbf{d}}_k = -\mathbf{Z}_k \mathbf{Z}_k^T \mathbf{g}_k, \quad (3.33)$$

onde  $\mathbf{g}_k$  é o gradiente da função objectivo. Se for encontrado um ponto admissível usando o procedimento do método PL, a fase principal do PQ arranca. Para procurar uma primeira direcção de procura  $\hat{\mathbf{d}}_1$  resolve-se um conjunto de equações lineares

$$\mathbf{H}\hat{\mathbf{d}}_1 = -\mathbf{g}_k \quad (3.34)$$

onde  $\mathbf{g}_k$  é o gradiente da função objectivo na iteração em curso  $\mathbf{x}_k$ , isto é,  $\mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}$ . Caso não seja encontrada uma solução executável para o problema PQ a direcção de procura  $\hat{\mathbf{d}}_k$  é procurada na rotina principal PSQ tal que minimize  $\gamma$ . Após a resolução do subproblema PQ obtém-se um vector  $\mathbf{d}_k$ , que é usado para formar uma nova iteração

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k \quad (3.35)$$

O incremento  $\alpha_k$  é determinado com o objectivo de obter um decréscimo suficiente na função de mérito e é ajustado por um parâmetro de penalidade tendo em consideração os constrangimentos que nesse momento estão inactivos mas que em instantes anteriores estavam activos dando uma contribuição positiva para a solução PQ. Este ajustamento assegura grandes contribuições dos constrangimentos nos parâmetros de penalidade, com pequenos gradientes, para os constrangimentos activos, no ponto da solução, acelerando a obtenção da solução óptima.

### 3.3 Modelo de Optimização

O principal objectivo do trabalho consiste no desenvolvimento de um programa que, utilizando um método de optimização, conduza a um melhoramento de modelos de elementos finitos, analisados com o programa de elementos finitos ANSYS, conduzindo a uma solução óptima do problema definido como a correlação entre os valores e vectores próprios do modelo a melhorar e de um modelo ou protótipo de referência. O programa a desenvolver utiliza o código MATLAB através do qual se acede aos modelos de elementos finitos e se modificam propriedades geométricas e materiais seleccionados em função dos resultados numéricos obtidos em cada análise de valores e vectores próprios de forma a atingir a máxima correlação. As propriedades seleccionadas no modelo numérico são alteradas pelo programa de melhoramento sendo a análise dinâmica do novo modelo executada pelo programa de elementos finitos para obtenção de novos resultados. A análise

dos resultados e a alteração do valor das variáveis é feito pelo programa de melhoramento sem a intervenção do utilizador utilizando exclusivamente a metodologia de optimização implementada. Assim é necessário que o ANSYS crie ficheiros ASCII de entrada e saída, para que o programa de melhoramento os consiga ler e reescrever introduzindo-lhes as alterações que conduzem ao modelo.

### **3.3.1 Estrutura de Ficheiros do ANSYS**

O ANSYS é acessível de duas formas: utilização interactiva, de mais fácil comunicação através de uma interface gráfica mas que não permite aceder a algumas das suas funcionalidades; utilização por linha de comando onde se acede os comandos através de uma linguagem de alto nível, o que permite tirar maior partido das suas potencialidades, mas que exige um conhecimento mais avançado.

Este programa de FEM tem disponíveis diversas rotinas, cada uma com um conjunto de funções que permitem realizar diversas tarefas específicas. As mais importantes para os objectivos deste trabalho são a PREP7, de carácter geral onde se constrói o modelo geométrico e se introduzem as características dos materiais e outras, a SOLUTION onde se aplicam as cargas e se obtém a solução da análise dinâmica e a POST1, uma interface de saída, que permite a extracção dos resultados da solução obtida.

O ANSYS trabalha sobre uma base de dados onde estão armazenados todos os dados de entrada e os resultados das análises, devidamente processados num ficheiro de trabalho com extensão DB ou DBB. Estas bases de dados vão armazenando continuamente todas as informações relativas à construção de modelos, parametrização das propriedades e outras, de uma forma sequencial. O utilizador não têm acesso directo ao conteúdo destas bases de dados. No entanto o programa ANSYS possibilita a gravação de toda a informação da base de dados num outro ficheiro, de extensão LOG ou LGW, cujo conteúdo é acedido como um vulgar ficheiro TXT. Um ficheiro LOG ou LGW pode ser acedido directamente mas nem sempre está garantida a reprodução exacta do modelo, principalmente se tiver uma grande dimensão. Este problema acontece quando o historial de alterações do modelo é grande possibilitando a perda de informação de determinadas fases da análise. Num ficheiro DB está contida toda a informação do modelo.

O ANSYS pode ser executado de forma contínua (BATCH) através da leitura directa de um ficheiro TXT e a informação ser processada interactivamente, sem intervenção do utilizador. Para isso o ficheiro a ser lido tem que conter toda a informação necessária numa sequência que chame as diversas rotinas pela mesma ordem da sua intervenção. Seguindo os princípios descritos, é criada uma estrutura para o programa, em linguagem de comandos, a serem executados pelo ANSYS, e dada em ficheiro TXT, com a seguinte informação:

#### 1 - Funções de entrada do programa

#### 2 - Definição do tipo de elementos e respectivas opções

|         |                                      |
|---------|--------------------------------------|
| SHELL63 | (Define o tipo de elemento de casca) |
| BEAM4   | (Define o tipo de elemento de barra) |
| outros  |                                      |

#### 3 – Informação das coordenadas geométricas da peça através dos nós

$X_1, Y_1, Z_1$   
 $\dots, \dots, \dots$   
 $X_n, Y_n, Z_n$

#### 4 – Informação das propriedades geométricas

|        |                    |                       |     |     |       |
|--------|--------------------|-----------------------|-----|-----|-------|
| tipo 1 | linha <sub>1</sub> | linha <sub>2</sub>    | ... | ... | $l_n$ |
| tipo 2 | área <sub>1</sub>  | área <sub>2</sub> ... |     | ... | $a_n$ |
| ...    | ...                |                       |     | ... | ...   |

#### 5 – Indicação dos dados de construção da tabela de conectividades elementos

|           |                   |               |               |                 |                    |
|-----------|-------------------|---------------|---------------|-----------------|--------------------|
| grupo 1   |                   |               |               |                 |                    |
| elementos | tipo de geometria | tipo material | tipo elemento | nó <sub>1</sub> | ...nó <sub>n</sub> |
| ...       | ...               | ...           | ...           |                 | ...                |
| grupo 2   |                   |               |               |                 |                    |
| ...       | ...               | ...           | ...           |                 | ...                |

#### 6 - Propriedades dos materiais

|        |     |     |     |     |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| tipo 1 | E   | v   | k   | ... | ... | ... | ... |
| tipo 2 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ...    | ... |     |     | ... | ... | ... | ... |

#### 7 – Construção da malha e execução dos cálculos

#### 8 – Apresentação dos resultados

As propriedades mecânicas dos materiais e as geométricas das peças são os parâmetros dos modelos que podem ser modificadas pelo programa de melhoramento em função dos resultados obtidos no programa de cálculo. O novo modelo de elementos finitos, com as novas propriedades, é lido pelo ANSYS levando a novos resultados de

análise. Por isso o formato e a estrutura dos dados com a informação dos parâmetros, deve ser devidamente identificado e ser comum ao programa ANSYS e à ferramenta de melhoramento implementada em MATLAB.

Uma vez definidas as condições iniciais, o ANSYS calcula as frequências naturais e os modos de vibração para a estrutura modelo. Estes resultados são escritos em ficheiro com o formato TXT, de forma que o programa de melhoramento os possa ler. Com estes resultados o programa de melhoramento avalia a sua aproximação ao objectivo e depois traça a estratégia de melhoria a implementar. O ficheiro de resultados formatados, gerado pelo ANSYS, tem o aspecto mostrado na tabela 3.1. Nesta tabela  $n$  representa o número de frequências naturais calculado e  $m$  o número de pontos do modelo que caracterizam os modos de vibração. Assim,  $\omega_1$  é a primeira frequência natural e  $f_{11} \cdots f_{1m}$  são os correspondentes modos de vibração obtidos nos  $m$  pontos e assim sucessivamente. No caso tridimensional, as  $m$  colunas da tabela podem também incluir resultados nas 3 direcções de deslocamento.

Tabela 3.1 Aspecto matricial da apresentação dos resultados obtidos no ANSYS

| n,         | m        |          |       |          |
|------------|----------|----------|-------|----------|
| $\omega_1$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | ..... | $f_{1m}$ |
| ...        | ...      | ...      | ..... | ...      |
| ...        | ...      | ...      | ..... | ...      |
| $\omega_n$ | $f_{n1}$ | $f_{n2}$ | ..... | $f_{nm}$ |

Com uma estrutura semelhante ao ficheiro de resultados do programa ANSYS, num outro ficheiro são colocados os resultados de referência obtidos nos ensaios experimentais ou noutro modelo numérico considerado mais representativo da estrutura. Este ficheiro de resultados tem o mesmo formato da tabela 3.1. É fundamental que os resultados no modelo de referência sejam obtidos nos mesmos pontos do modelo de elementos finitos a melhorar, pelo que as tabelas de resultados de ambos os modelos têm de ter sempre o mesmo número de colunas. É com base nestes resultados de referência que o programa de melhoramento vai alterar os parâmetros de entrada do modelo numérico de forma a que os resultados do modelo a melhorar venham a convergir para os valores de referência.

O resultado do processo de optimização é um modelo de elementos finitos melhorado que, tendo propriedades diferentes do modelo inicial, tem frequências naturais e



modos de vibração semelhantes às do modelo de referência. Na figura 3.1 apresenta-se o fluxograma que descreve a comunicação entre os programas de análise, ANSYS, e de melhoramento de modelos de elementos finitos, MATLAB.

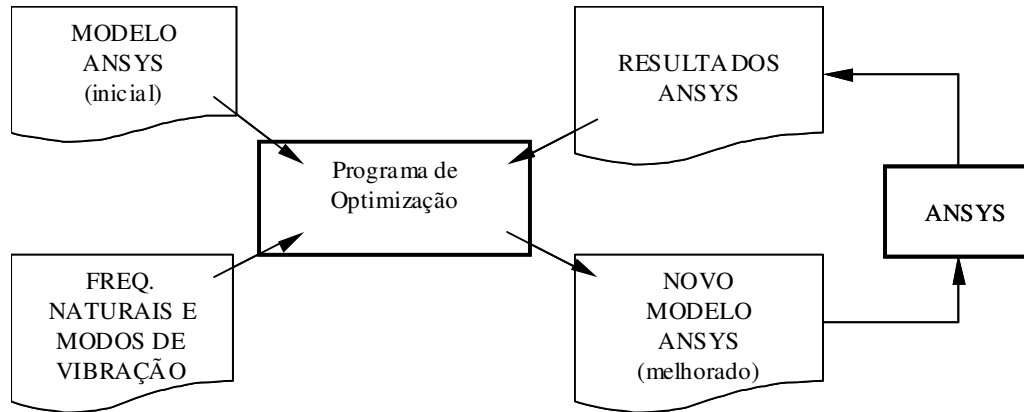


Figura 3.1 Fluxograma funcional do programa com comunicação entre ANSYS e a ferramenta MATLAB

### 3.3.2 Definição e Implementação do Modelo de Melhoramento

Uma vez estabelecido o protocolo de comunicação entre o programa de análise dinâmica e o de controlo do processo de melhoramento do modelo de elementos finitos, analisa-se agora a metodologia de melhoramento a utilizar. O objectivo é modificar o modelo de forma a que as suas frequências naturais e modos de vibração sejam o mais idênticos possível às do modelo de referência. Procura-se estabelecer uma função de optimização  $f(\mathbf{q})$  definida assim

$$\min f(\mathbf{q})$$

em que

$$\mathbf{q} = \left[ (E_i, \nu_i, \rho_i, t_i, \dots), (E_j, \nu_j, \rho_j, t_j, \dots), \dots \right]^T$$

no qual  $(E_i, \nu_i, \rho_i, t_i, \dots)$  representa um grupo de propriedades do modelo de elementos finitos a modificar. A função de optimização descreve a correlação entre os resultados

obtidos no modelo a melhorar relativamente aos do modelo de referência. Para a função objectivo usa-se o critério do cálculo da matriz  $MAC$  através de

$$f(\mathbf{q}) = -p_1 \left( \sum_{i=1}^N MAC_{ii} \right) + p_2 \left( \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N MAC_{ij} \right) + p_3 h(\omega) \quad (3.36)$$

com

$$h(\omega) = \sum_{i=1}^N \left( \omega_{ref} - \omega_{modelo} \right)^2 \quad (3.37)$$

A minimização da função descrita pela equação (3.26) corresponde à maximização da diagonal principal da matriz  $MAC$ , à minimização dos termos fora da diagonal e ainda à minimização da diferença entre as frequências naturais. Os pesos  $p_1, p_2, p_3$  são números positivos arbitrários. As variáveis de projecto estão sujeitas às seguintes restrições de constrangimento:

$$\mathbf{q}_i \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_s$$

em que

$$\mathbf{q}_i = \left[ E_{xi}, E_{yi}, \nu_{xyi}, \nu_{zyi}, \rho_i, h_i \right]^T$$

e

$$\mathbf{q}_s = \left[ E_{xs}, E_{ys}, \nu_{xys}, \nu_{zys}, \rho_s, h_s \right]^T,$$

representam os valores mínimos e máximos assumidos pelos parâmetros a melhorar.

As duas primeiras parcelas da equação (3.36) representam o efeito da correlação entre modos de vibração obtidos através do cálculo da matriz  $MAC$ . A primeira refere-se aos valores encontrados na diagonal principal e a segunda aos valores calculados fora da diagonal principal. O terceiro termo representa o quadrado da diferença entre frequências naturais emparelhadas. A elevação ao quadrado da diferença entre as frequências dos modelos contribui para uma convergência mais rápida do efeito desta parcela para o valor objectivo.

A diferença de dimensões entre a terceira parcela e as duas primeiras na fase inicial da optimização pode ser assinalável, dando preponderância da parcela correspondente à diferença de frequências. Mais ainda, esta terceira parcela pode ter dimensões muito variadas, dependendo da diferença inicial entre o valor das frequências naturais em comparação e do número de frequências envolvidas na análise. Nas outras parcelas não se nota uma variação tão assinalável no seu valor. Para diminuir as dificuldades numéricas associadas às diferentes dimensões das várias parcelas a função objectivo é modificada fazendo a adimensionalização das parcelas, isto é, para a iteração  $k$  o valor da função objectivo é dado por:

$$f(\mathbf{q}_k) = -p_1 \frac{\left( \sum_{i=1}^N MAC_{ii} \right)_k}{\left( \sum_{i=1}^N MAC_{ii} \right)_0} + p_2 \frac{\left( \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N MAC_{ij} \right)_k}{\left( \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N MAC_{ij} \right)_0} + p_3 \frac{\sum_{i=1}^N (\omega_{ref} - \omega_{modelo})^2_k}{\sum_{i=1}^N (\omega_{ref} - \omega_{modelo})^2_0} \quad (3.38)$$

A nova função objectivo traduz uma contribuição mais equitativa de cada parcela mas reduz a eficácia de convergência da terceira parcela da equação e o contributo do efeito das frequências no valor total da função. Tanto a primeira parcela como a terceira correspondem ao somatório de um conjunto de valores igual ao número de frequências naturais envolvido em cada análise. A segunda parcela, representa o somatório de todos os valores da matriz  $MAC$  fora da diagonal principal, ou seja, contém um número de termos próximo da soma das outras duas parcelas. Face a estas condições, os pesos aqui utilizados para as três parcelas da função objectivo são:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, \\ p_2 &= \frac{1}{N_{freq}}, \\ p_3 &= 1 \end{aligned}$$

em que  $N_{freq}$  representa o número de frequências naturais envolvido no processo de melhoramento do modelo de elementos finitos.

### 3.4 Ferramentas Numéricas de Apoio

O MATLAB (2002) é um ambiente de programação utilizado neste trabalho para desenvolver o programa de melhoramento de modelos de elementos finitos. Este programa inclui um conjunto de funções pré-programadas à disposição do utilizador, entre as quais as funções de optimização contidas numa biblioteca (*toolbox*) apropriada. A utilização dos ficheiros contidos nesta *toolbox* para a resolução dos problemas envolvidos neste trabalho em detrimento do desenvolvimento de uma rotina dedicada apresenta, entre outras, duas grandes vantagens: fiabilidade uma vez que são funções extremamente testadas antes de serem incluídas na *toolbox*; o seu código é aberto, ou seja, é possível aceder às fontes o que permite alterá-los de acordo com as necessidades específicas do tipo de problema de aplicação.

Na *toolbox* de optimização existem cerca de 20 rotinas, cada uma dedicada a resolver problemas específicos deste tipo. Na tabela 3.2 descrevem-se sumariamente as diversas rotinas ao dispor para a solução de problemas de optimização.

Tabela 3.2 Descrição sumária das rotinas incluídas na *Toolbox* de optimização

| Designação   | Descrição sumária   |
|--|---|
| Funções de minimização não linear                          |   |
| fminbnd  | Procura um mínimo de uma função com uma variável num intervalo fixo.  |
| fmincon  | Procura um mínimo restringido de uma função de várias variáveis partindo de um valor estimado inicial. Permite ser utilizado entre limites.               |
| fminsearch   | Procura um mínimo de uma função de várias variáveis partindo de um valor estimado inicial.  |
| fminunc  | Procura um mínimo não restringido de uma função de várias variáveis partindo de um valor estimado inicial.  |
| fseminf  | Procura um mínimo restringido de uma função semi infinita de várias variáveis partindo de um valor estimado inicial. Permite ser utilizado entre limites. |
| Funções multi-objectivo de minimização não linear          |   |
| fgoalattain  | Resolve problemas de objectivo alcançável.  |
| fminimax   | Minimiza o valor do pior caso de um conjunto de funções multivariável   |
| Minimização de problemas com matrizes                      |   |
| linprog  | Resolve problemas de programação linear   |
| quadprog   | Resolve problemas de programação quadrática   |
| Resolução de equações não lineares (determinação de zeros) |   |
| fsolve   | Encontra as raízes de sistemas não lineares de equações.  |
| fzero  | Encontra a raiz de uma função contínua de uma variável  |
| Problemas lineares com matrizes (mínimos quadrados)        |   |
| lsqlin   | Resolve o problema linear de mínimos quadrados restringido.   |
| lsqnonneg  | Resolve o problema linear não negativo de mínimos quadrados restringido   |
| Problemas não lineares (mínimos quadrados)                 |   |
| lsqcurvefit  | Resolve problemas de ajustamento de dados a curvas.   |
| lsqnonlin  | Resolve problemas de ajustamento de dados a curvas.   |

Os principais algoritmos dos problemas de média dimensão não constrangidos existentes no MATLAB são o método de procura simplex, Nelder-Mead e o método Quasi-Newton BFGS. Para os problemas de minimização constrangidos são usados os métodos minimax, multi-objectivo e optimização semi-infinita que utilizam também a programação sequencial quadrática.

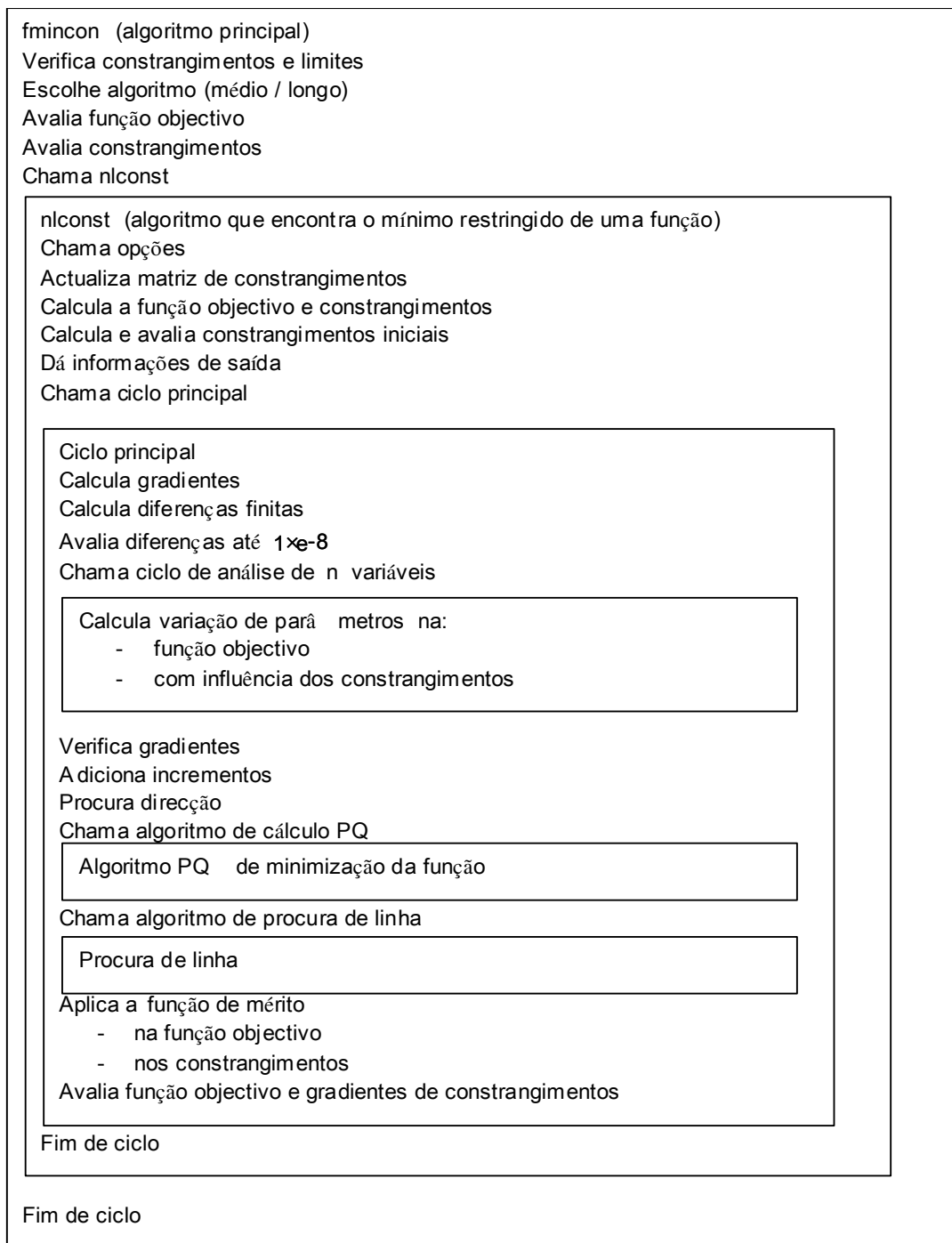


Figura 3.2 Esquema simplificado de funcionamento da função `fmincon`

Para os objectivos do presente trabalho os primeiros 5 algoritmos são os mais indicados, uma vez que os resultados obtidos no programa FEM, têm um comportamento não linear relativamente às variáveis do projecto. Destes o `fminbnd` é só aplicável a uma variável, o `fminsearch` assim como o `fminunc` não permitem a utilização de constrangimentos e portanto não aceitam a introdução dos limites máximo e mínimo dos parâmetros variáveis e o `fseminf` é utilizado para funções semi-infinitas das várias variáveis. Desta forma o único algoritmo aplicável para este estudo é o `fmincon`. Na figura 3.2. apresenta-se a estrutura do algoritmo `fmincon`, considerando apenas as opções que se aplicam neste trabalho.

O algoritmo `fmincon` procura um mínimo de uma função constrangida de várias variáveis, partindo de um valor estimado inicial. Este algoritmo, utiliza o método de optimização PSQ. Os subproblemas em cada iteração são resolvidos por programação quadrática e na melhoria do Hessiano da matriz Lagrangeana é utilizado um dos métodos Quasi-Newton. Na formulação do algoritmo foram previstas várias opções de entrada e saída de dados.

### 3.5 Melhoramento de Estruturas Analisadas por Elementos Finitos

O programa desenvolvido permite iniciar o programa de elementos finitos em cada iteração de forma a resolver o problema de valores e vectores próprios de cada novo modelo de elementos finitos até que se atinja um que em termos dinâmicos seja equivalente ao modelo/protótipo de referência. Sequencialmente o programa, desenvolvido em MATLAB, lê os ficheiros de entrada do ANSYS, manda executar esses ficheiros, recebe os resultados da análise e processa-os, compara-os com os valores de referência, verifica a sua relação com o objectivo através do *MAC*, corrige as variáveis de projecto, cria novo ficheiro de dados para o programa ANSYS, mandar executá-lo e assim sucessivamente até que a função objectivo atinja um mínimo que é solução pretendida.

O ficheiro de dados para executar o programa ANSYS é estruturado de forma a permitir o controle da obtenção dos valores e vectores próprios adequados e a saída de resultados. Para cumprir com estes objectivos o ficheiro possui a seguinte estrutura:

- Especifica o nome e o tipo de trabalho em análise modal (entre os permitidos pelo ANSYS)

- Chama a função `PREP7` (para definir o problema)
- Define o tipo de elementos a utilizar na modelação do modelo
- Define as propriedades dos materiais (variáveis no MATLAB)
- Define a geometria da estrutura (variáveis no MATLAB)
- Associa as propriedades à geometria do modelo
- Especifica a malha do modelo de elementos finitos e associa-a à geometria
- Chama função `SOLUTION` para calcular os valores e vectores próprios
- Define o problema como estrutural
- Inicia ciclos de extracção das frequências modais até aos seguintes limites
  1. número das iterações até 50
  2. número das iterações até à frequência limite, `PRFRQ` (variável no MATLAB)
- Escolhe o tipo de análise modal com extracção no sub-espço
- Escreve os modos de vibração no ficheiro de resultados
- Especifica a formulação de matriz de massa por pontos
- Normaliza os modos em relação à matriz de massa
- Especifica a rigidez dos modos do corpo
- Especifica a opção da extracção dos valores próprios e o número máximo de iterações,
- Manda resolver o problema de valores e vectores próprios
- Recolhe num parâmetro (`F1`), a frequência natural
- Arquiva o número de frequências extraídas
- Chama a função de pós-processamento `POST1`, para
- Cria tabela para escrever os resultados
- Especifica os pontos e direcções escolhidos na estrutura para extracção de resultados
- Executa ciclos de obtenção e escrita de resultados na tabela
- Imprime os valores seleccionados em ficheiro de resultados
- Termina execução do programa e sai.

Com o objectivo de limitar a dimensão do problema definem-se limites no número de iterações e na frequência máxima que se pretende extrair, que são parametrizáveis a partir do programa em MATLAB. Estas funcionalidades permitem limitar o número de cálculos no programa FEM, nos casos em que surgem muitas frequências naturais não

associadas à estrutura (parasitas), ou em estruturas demasiadamente rígidas cujas frequências naturais atingem valores que excedem largamente as frequências naturais do modelo/protótipo de referência.

No programa executável em MATLAB, são construídas funções independentes para cada fase do melhoramento do modelo de elementos finitos como se ilustra na figura 3.3. O programa principal, começa por iniciar o programa ANSYS para permitir a análise dinâmica do modelo de elementos finitos de acordo com o ficheiro de entrada que contem todas as instruções. Da execução deste ficheiro no ANSYS resulta um ficheiro de resultados, que é lido através da função `traren4.m`. De seguida o programa de melhoramento chama função `escri84.m` que lê e copia o mesmo ficheiro de entrada para outro ficheiro `modif.txt`, que se destina a ser alterado durante o ciclo de optimização. É então chamada a função `calcon4.m` que identifica as linhas do ficheiro do ANSYS que contêm os parâmetros variáveis do modelo, arquiva-os numa tabela e relaciona cada parâmetro com um factor de variação que permite o cálculo dos limites atribuídos a cada variável. O factor de variação pode ser diferente para o limite superior e inferior. Segue-se a atribuição, variável a variável, dos valores iniciais  $X_o$  e o cálculo, através do factor de variação, dos limites inferior (LB) e superior (UB) das variáveis de projecto. Paralelamente chama-se a função `trarex1.m` para ler o ficheiro dos resultados de referência `PLSM5f2.txt` e extrair as frequências naturais e os modos de vibração de referência. É nesta fase que se chama a função de cálculo do *MAC*, designada `nlcOUT34.m`. Esta começa por chamar a função `traren4.m` para extrair as frequências naturais e os modos de vibração dos resultados da análise dinâmica do modelo de elementos finitos, de uma forma semelhante ao executado pela `trarex1.m`.

É nesta fase do processo de cálculo que são identificados os modos de vibração e as frequências naturais tanto do modelo de elementos finitos como do de referência. No que se segue designam-se por: *nfreqA* e *nfreqR* os números de frequências naturais, *matrizFreqA* e *matrizFreqR* as matrizes das frequências naturais e *matrizModalA* e *matrizModalR* as matrizes modais, dos modelos de elementos finitos e de referência, respectivamente.



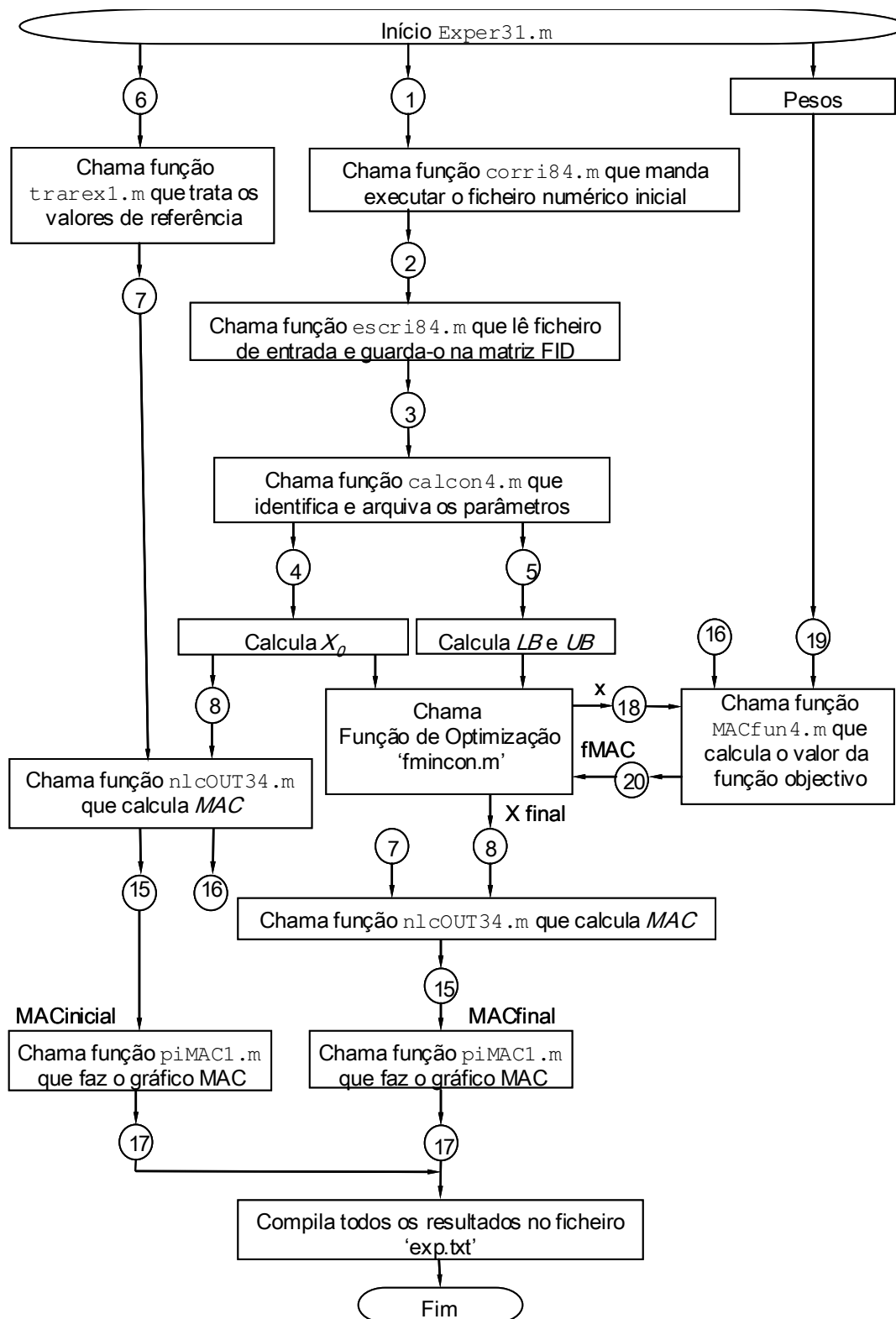


Figura 3.3 Diagrama de sequência do programa implementado em MATLAB

O passo seguinte, na metodologia implementada, desenvolve-se na função `nlcOUT34` e traduz-se no cálculo do *MAC* afectado da função *ASMAC*. O resultado desta função é o valor de todos os elementos da matriz *MAC*, o somatório dos valores obtidos na sua diagonal principal e o somatório dos valores fora da diagonal principal da mesma matriz. Com estes resultados, o programa principal chama, a função `piMAC.m` que reproduz graficamente a matriz *MAC* e a matriz coluna das correlações entre os pares de frequências naturais. De seguida é chamada a função de optimização `fmincon.m` a qual controla todo o resto do processo de optimização. Começa por ler  $\mathbf{X}_o$ ,  $\mathbf{X}_i$  e  $\mathbf{X}_s$ , chama a função `MACfun4.m` que extrai o valor da função objectivo designada *fMAC* e inicia um conjunto de iterações, obtendo em cada uma um novo  $\mathbf{X}$ , até que se atinja o valor óptimo. A função `MACfun4.m`, antes de calcular *fMAC* chama a função `nlcOUT34.m` que, para cada  $\mathbf{X}$ , manda executar no ANSYS o ficheiro do modelo de elementos finitos para calcular novos resultados, sendo o novo valor da função objectivo calculado com estes valores.

Concluída a optimização, o programa principal recebe o valor final de  $\mathbf{X}$  e de *fMAC* e volta a chamar a função `nlcOUT34.m` que calcula o *MAC* para o valor óptimo de  $\mathbf{X}$ . Depois chama de novo a função `piMAC.m` para reproduzir graficamente o resultado final e compila todos os resultados num ficheiro designado `ext.txt`.

A função `Corri84.m` faz executar o ficheiro numérico inicial de entrada no ANSYS e sai após o ANSYS iniciar a execução. Na figura 3.4 ilustra-se a sequência de operações desta função.

A função `escri84.m`, cuja descrição é feita na figura 3.4, lê o ficheiro numérico inicial de entrada do ANSYS, guarda-o numa matriz coluna identificada por [FID] e escreve o seu conteúdo num novo ficheiro designado `modif.txt`. Estas operações são executadas da seguinte forma:

- Conta as linhas do ficheiro de entrada do ANSYS,
- Guarda o conteúdo do ficheiro na matriz [FID], linha a linha,
- A partir desta matriz escreve um novo ficheiro igual ao de entrada chamado `modif.txt`,
- Abre o ficheiro `modif.txt` e guarda o seu conteúdo na matriz [OLA].

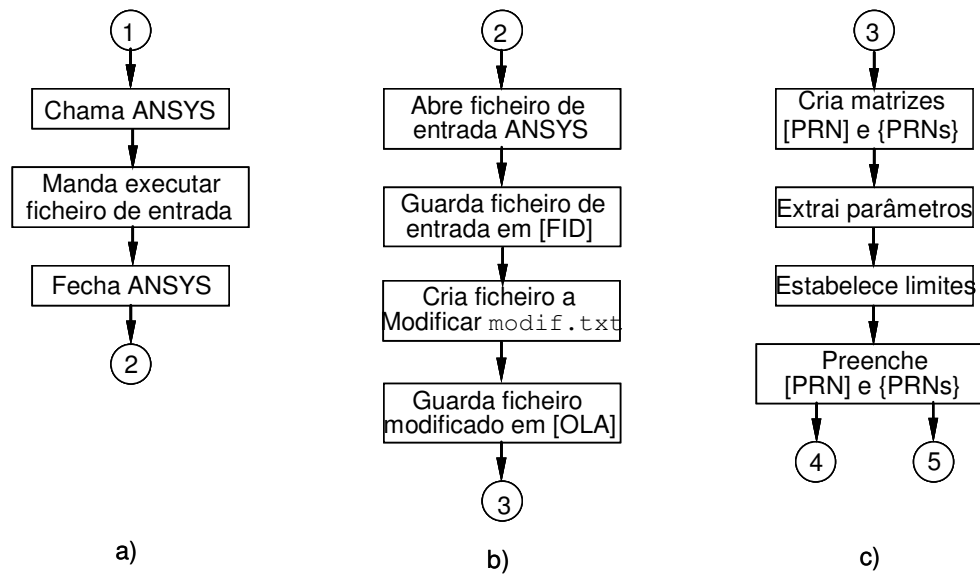


Figura 3.4 Diagrama de sequência das funções: a).corri84.m. b).escri84.m. c).calcon24.m.

A função `calcon24.m` identifica as linhas do modelo de elementos finitos com as variáveis de projecto e arquiva-as numa tabela de valores. Na figura 3.4 ilustra-se a sequência de operações desta função. No procedimento aqui envolvido criam-se as seguintes tabelas:

- Primeira tabela designada por [PRN] com 5 colunas que contem em cada linha:
  1. o número da linha no ficheiro onde se localiza o parâmetro,
  2. a posição do sinal de igualdade
  3. o valor numérico do parâmetro,
  4. a variação admissível no limite inferior
  5. a variação admissível no limite superior
- Segunda tabela designa-se [PRNs] com 1 coluna que contem a descrição do parâmetro em texto.

Na tabela 3.3 apresentam-se os parâmetros admitidos como variáveis e a respectivas designações.

Tabela 3.3 Designação atribuída aos parâmetros

| Parâmetro a variar (variáveis)       | Designação         |
|--------------------------------------|--------------------|
| Módulo de elasticidade na direcção x | PREX <sub>n</sub>  |
| Módulo de elasticidade na direcção y | PREY <sub>n</sub>  |
| Densidade                            | PRDNS <sub>n</sub> |
| Coefficiente de Poisson xy           | PRPXY <sub>n</sub> |
| Coefficiente de Poisson yz           | PRPYZ <sub>n</sub> |
| Espessura                            | PRES <sub>n</sub>  |
| Largura                              | PRLG <sub>n</sub>  |

A função `trarex1.m`, apresentada na figura 3.5, trata os valores de referência (ou experimentais). Começa por ler o ficheiro dos valores de referência que é criado externamente. Deste retira os modos de vibração e as frequências naturais de referência e arquiva-os em matrizes designadas *matrizModalR* e *matrizFreqR*, respectivamente. A função procede da seguinte forma:

- Lê o ficheiro de referência onde:
  - Identifica o número de frequências naturais
  - Identifica o número de pontos através dos quais são identificados os modos de vibração de referência
- Elimina as frequências e os modos de vibração correspondentes aos modos rígidos e aos modos parasitas, de acordo com o seguinte critério:

$$\frac{\sum |\text{vectorModal}|}{n^{\circ} \text{ pontos}} \leq 0,001 \quad (3.39)$$

Os modos de vibração rígidos ou os parasitas podem ocorrer devido à forma de suspensão da estrutura ou por influência da massa dos sensores aplicados na estrutura, especialmente quando as suas massas são próximas das da estrutura onde estão aplicados. Nestes casos, a amplitude das deformadas na totalidade dos pontos de medida é muito baixa ou mesmo nula e consequentemente estes modos devem ser eliminados. Na figura 3.5 ilustra-se a sequência de operações da função `trarex1.m`, que executa os seguintes procedimentos:

- Cria a matriz de modos de vibração
- Cria a matriz coluna de frequências modais

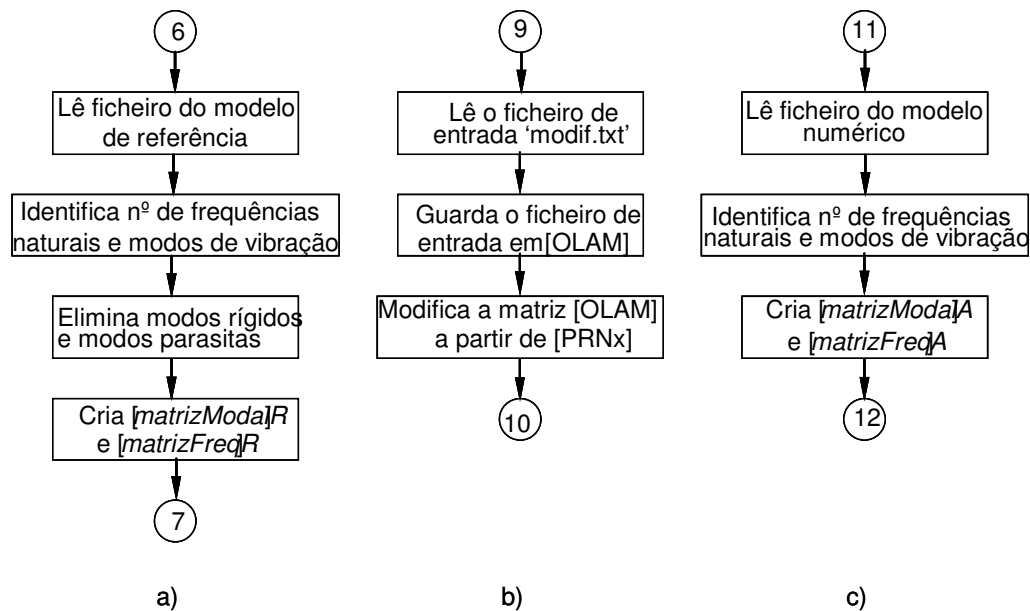


Figura 3.5 Diagrama de sequência das funções: a).trarex1.m, b).escrim1.m, c).traren4.m.

A função `escrim1.m`, ilustrada na figura 3.5, lê o ficheiro modificado de entrada do ANSYS `modif.txt`, guarda-o numa matriz coluna identificada por [OLAM] e altera-o nas linhas correspondentes aos parâmetros, de acordo com a informação recebida no optimizador. Esta informação é recebida através de uma matriz coluna designada [PRNx]. Estas operações são executadas da seguinte forma:

- Abre o ficheiro `modif.txt` de entrada do ANSYS,
- Guarda o conteúdo do ficheiro na matriz [OLAM], linha a linha,
- Modifica as linhas na matriz [OLAM] correspondentes aos parâmetros com os novos valores recebidos do optimizador através da matriz coluna [PRNx].

A função `traren4.m`, também apresentada na figura 3.5, trata os resultados do modelo de elementos finitos. Começa por ler o ficheiro de resultados, retira os modos de vibração e as frequências naturais e arquiva-os em matrizes designadas *matrizModaA* e *matrizFreqA*, respectivamente. A função `traren4.m` tem a seguinte sequência:

- Lê o ficheiro do modelo numérico onde:
  - Identifica o número de frequências naturais
  - Identifica o número de pontos correspondentes aos modos de vibração

- Cria a matriz de modos de vibração
- Cria a matriz coluna de frequências modais

A função `altFRQ4.m`, apresentada na figura 3.6, altera o limite máximo de frequências naturais permitido, no cálculo do modelo de elementos finitos, a executar no ANSYS, até que o número destas frequências seja duplo das obtidas no modelo de referência. Obtém-se assim uma quantidade suficiente de frequências e modos de vibração que possibilitam um ajustamento mais correcto entre os dois modelos. Esta função intervém nos modelos de elementos finitos onde algumas das frequências naturais calculadas são de valor mais elevado que o previsto, ultrapassando os limites estabelecidos. Neste caso o número de frequências dentro dos limites é insuficiente, impossibilitando o que o programa continue o cálculo. A função tem a seguinte sequência de instruções:

- Executa ciclo enquanto o número de frequências naturais do modelo numérico é menor do que o dobro do número de frequências naturais do modelo de referência,
- Identifica a linha com parâmetro `PRFRQ`,
- Lê o valor da frequência limite
- Acresce-o de 500 Hz
- Altera o ficheiro `modif.txt` com o novo modelo
- Faz correr o ficheiro `modif.txt` no ANSYS,
- Chama a função `traren3.m` para ler resultados da análise,
- Altera a matriz coluna[FID]
- Fim de ciclo.

A função `nlcOUT34.m`, descrita na figura 3.6, calcula a matriz de comparação modal *MAC* afectada do *ASMAC*. Começa por chamar a função `escri1.m` para alterar o ficheiro `modif.txt`, de acordo com um conjunto de valores das variáveis, aqui designadas por **X**, recebidos do optimizador, que representam as estimativas das variáveis de projecto. Para ler os resultados obtidos no ANSYS é utilizada a função `traren4.m`. Com os resultados da análise dinâmica calcula-se a matriz *MAC*. Se o número de frequências naturais extraídas do modelo numérico for menor que o de frequências do modelo de referência, chama-se a função `altFRQ.m`, para que o cálculo da matriz *MAC* se possa realizar.

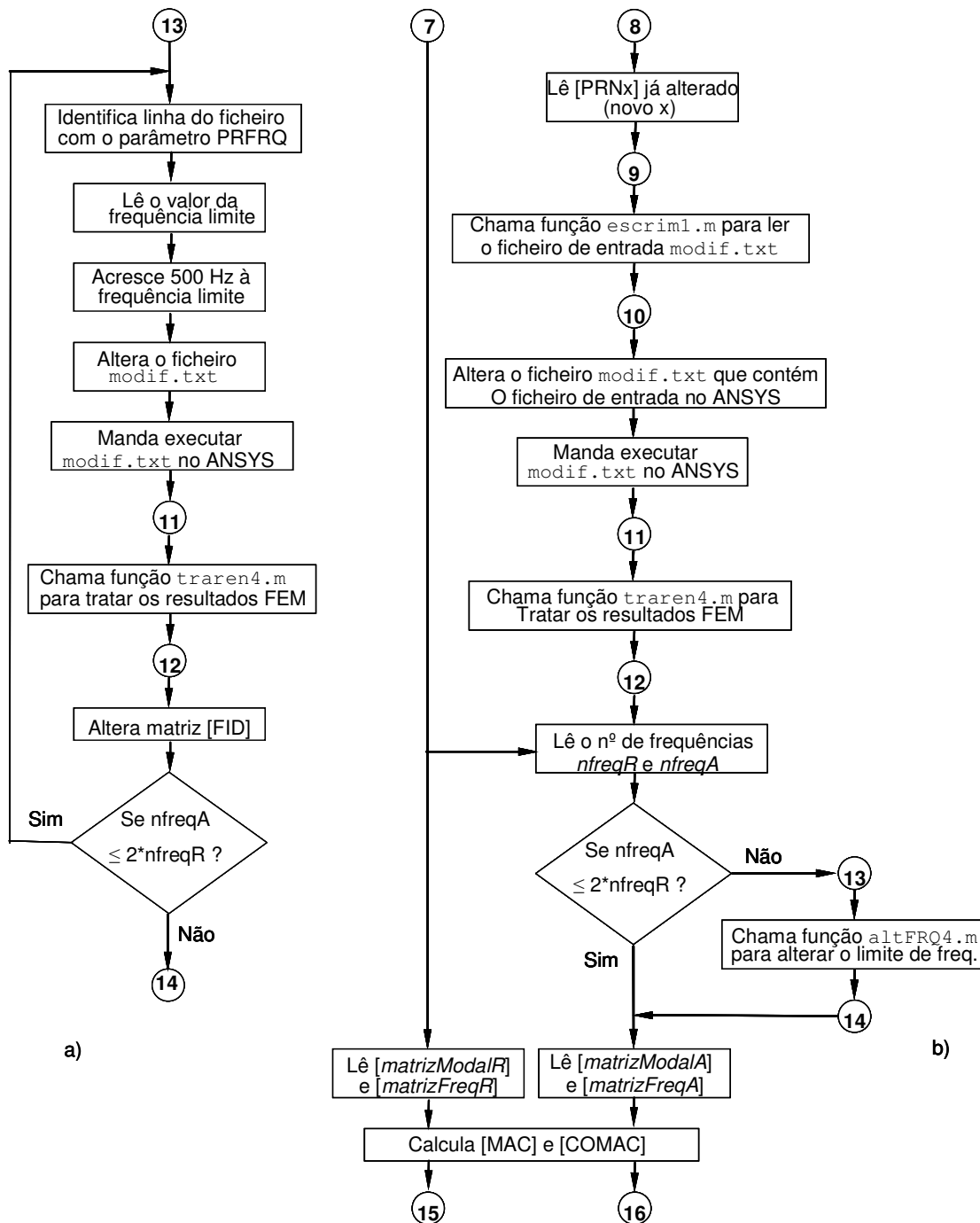


Figura 3.6 Diagramas de sequência das funções: a) altFRQ4.m b) nlOUT34.m

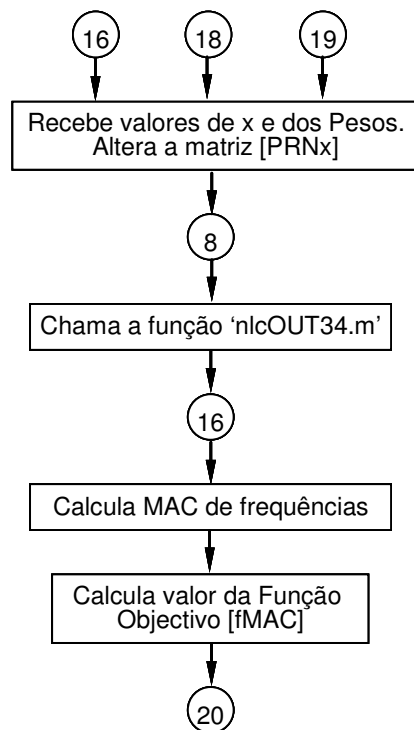
A sequência de procedimentos utilizada pela função nlOUT34.m é resumida da seguinte forma:

- Recebe valor de **X**,
- Chama escriml.m,

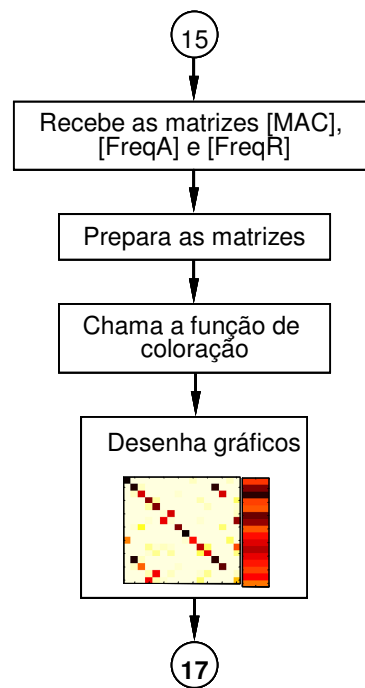
- Corre `modif.txt` no ANSYS, depois de alterado,
- Chama `traren4.m`,
- Chama `altFQR4.m` se o número de frequências naturais for insuficiente,
- Calcula *MAC* afectado do *ASMAC* e extrai resultados para aplicar na função *objectivo*.

A função `MACfun4.m`, apresentada na figura 3.7, calcula o valor da função *objectivo*, sendo chamada pela função de optimização em cada iteração. A função `MACfun4.m` lê os novos valores das frequências naturais e modos de vibração do modelo de elementos finitos e chama a `nlcOUT34.m`, que calcula a nova matriz *MAC*. Com estes resultados é calculada a função *objectivo*. Esta função está estruturada da seguinte forma:

- Recebe os valores de **X**, e dos pesos
- Chama `nlcOUT34.m` para calcular a nova matriz *MAC*,
- Calcula correlação entre as frequências naturais dos modelos através do *MAC*,
- Calcula o valor da função *objectivo*.



a)



b)

Figura 3.7 Diagrama de sequência das funções: a) `MACfun4.m` b) `piMAC1.m`.



A função `piMAC1.m`, também apresentada na figura 3.7, constrói a representação gráfica do *MAC* e da correlação entre frequências naturais do modelo numérico e de referência. No caso da matriz *MAC* as cores podem variar entre o branco que representa um valor próximo de zero (divergência muito grande entre valores) e o preto que representa um valor unitário a que corresponde uma forte correlação. Para a matriz coluna de correlação entre frequências as cores escolhidas são opostas, representando o branco a melhor aproximação entre resultados. A função `piMAC1.m` desempenha a seguinte sequência de acções:

- Recebe as matrizes *MAC*, *matrizFreqA* e *matrizFreqR*,
- Prepara as matrizes para a representação gráfica,
- Chama a função de representação gráfica coloração,
- Manda executar a representação gráfica.

### 3.6 Sumário e Discussão

Foram abordados alguns métodos de optimização para o cálculo do mínimo de funções não lineares contínuas, em especial quando sujeitas a constrangimentos. Para os problemas abordados neste trabalho os métodos mais adequados baseiam-se na obtenção dos gradientes da função objectivo para a procura da solução a partir dos valores iniciais dados. Estes métodos apresentam algumas dificuldades de aplicação especialmente se as funções a optimizar tiverem fortes descontinuidades. Existe a possibilidade dos métodos de optimização não detectarem alguns mínimos, dado que durante a análise dos incrementos a informação do declive da função pode ser recolhida fora da zona de ocorrência do mínimo. Outra dificuldade ocorre se a função a minimizar apresentar vários mínimos não havendo garantia de que se atinja um mínimo global. Para minimizar esse problema é necessário seleccionar criteriosamente o ponto inicial para a primeira iteração e proceder a várias análises de confirmação partindo de diversos pontos iniciais dentro dos limites de variação das variáveis de projecto.

Na utilização do programa comercial de elementos finitos ANSYS para a análise dinâmica do modelo de elementos finitos é verificada a necessidade de utilização da sua linguagem de comandos para permitir um melhor controlo do processo de cálculo e da obtenção de resultados adequados ao modelo numérico, após cada iteração. Durante o processo de optimização as variáveis de projecto são alterados muitas vezes dentro dos

limites considerados, pelo que o modelo numérico deve ter consistência de forma a permitir que essas alterações não conduzam a erros de cálculo. A escolha dos pontos onde são colhidos os modos de vibração é também uma questão importante, que merece uma atenção particular no capítulo 4 deste trabalho. O objectivo é determinar um modelo numérico que represente o melhor possível o modelo de referência, pelo que a selecção dos pontos da estrutura nos quais se medem os modos de vibração é de fundamental importância.

Foi apresentado o modelo matemático para a função de optimização que representa a correlação entre o modelo de referência e o modelo de elementos finitos a melhorar. Esta função integra duas parcelas relacionadas com os modos de vibração e uma terceira com as frequências naturais da estrutura. O escalamento das parcelas da função objectivo através de pesos foi analisado tendo sido propostos valores para esses pesos baseados na estrutura do problema.

Foi elaborado um programa em MATLAB, para implementação do método de melhoramento do modelo numérico, recorrendo à função de optimização `fmincon.m`, disponível na *toolbox* de optimização do programa MATLAB. O programa desenvolvido tem por objectivo controlar o melhoramento do modelo de elementos finitos sem intervenção interactiva do utilizador.

## **CAPÍTULO 4 – PROPRIEDADES QUE INFLUENCIAM A MELHORIA DO MODELO. ANÁLISE DE SENSIBILIDADES**

A avaliação e qualidade dos resultados obtidos na simulação de qualquer modelo numérico dependem da qualidade e fiabilidade dos respectivos modelos. A influência das propriedades materiais e geométricas dos elementos de FEM escolhidos sobre a qualidade dos modelos são objecto de análise no presente capítulo. Neste contexto, procede-se à análise de sensibilidade destes parâmetros, de forma a poder ser tirado o máximo partido das soluções propostas para a melhoria de modelos de elementos finitos para a análise dinâmica de estruturas. De forma a demonstrar as metodologias e princípios envolvidos analisam-se dois casos simples: uma viga prismática e uma placa quadrada de pequena espessura.

### **4.1 Introdução**

A solução para o problema de optimização está dependente, não só do valor dos parâmetros envolvidos na modelação da estrutura, tais como módulos de elasticidade,

coeficientes de Poisson, densidade e dimensões geométricas,  $(E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{zy}, \rho, h)$ , mas também do grau de adaptabilidade do modelo numérico a um modelo de referência. Este modelo de referência pode ser definido a partir da utilização de parâmetros rigorosos e uma modelação mais detalhada ou a partir de condições experimentais directas sobre um protótipo existente. Esta adaptabilidade tem a ver com a escolha apropriada dos parâmetros usados na descrição material e geometria do modelo numérico. A análise de sensibilidade permite determinar quais os parâmetros do modelo numérico a que a resposta dinâmica é mais sensível e assim tomar decisões sobre como melhorar o modelo de elementos finitos.

A análise de sensibilidade refere-se à determinação da forma de variação de cada parâmetro para o qual seja possível uma solução óptima, ou então detectar se não existiria outra solução melhor, cujos parâmetros de optimização não tenham eventualmente sido utilizados. Para a demonstração destes objectivos utilizam-se dois exemplos simples para substanciar a discussão: uma viga de secção rectangular de secção 18.2x1.82 mm com o comprimento de 1.1 m; uma placa quadrada de 0.3 m de largura e espessura 1.82 mm. O recurso a modelos simples permite fazer a comparação entre resultados analíticos, retirados da literatura, com resultados numéricos obtidos através de modelos de elementos finitos ou com os modelos melhorados aqui desenvolvidos. É esta comparação que possibilita ajuizar a qualidade que o modelo melhorado permite atingir.

## 4.2 Viga de Secção Rectangular

As principais características da viga de secção rectangular estão apresentadas na figura 4.1. Esta viga é pouco espessa de forma a ter frequências naturais mais baixas. As propriedades do material são as mesmas dos modelos experimentais, que são descritas noutras secções deste trabalho.

A análise de vibrações de uma viga simples, livre no espaço, conduz ao cálculo das suas frequências naturais, apresentadas na tabela 4.1, através de (Timoshenko, 1974: 424):

$$f_n = \frac{\left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \right)^2 \sqrt{\frac{E I}{\rho A}}}{2\pi l^2} \quad \text{com } n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (4.1)$$

Os modos de vibração podem ser representados por funções trigonométricas e hiperbólicas (Timoshenko, 1974: 424), afectadas de constantes que só dependem das

condições fronteira. Na tabela 4.1 mostram-se as primeiras 5 frequências naturais e os respectivos modos de vibração. Durante o melhoramento do modelo, não é esperada nenhuma variação significativa das formas destas funções pelo que, nesta análise, apenas se comparam as frequências naturais. As propriedades da viga são apresentadas na tabela 4.2.

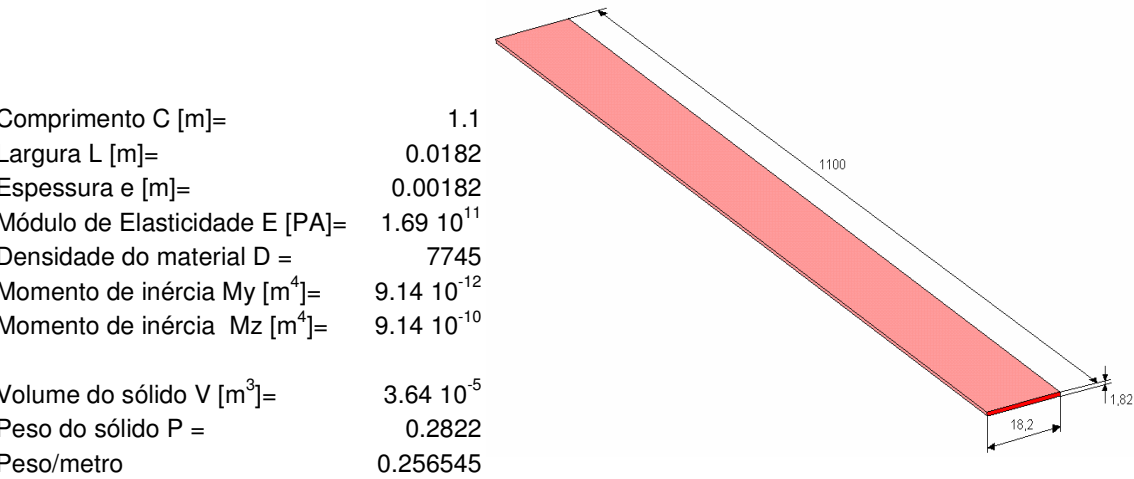


Figura 4.1 Viga livre, dimensões e propriedades

Tabela 4.1 Primeiras frequências naturais e modos forma da viga livre

| Modo | Frequência (Hz) |            | Forma |
|------|-----------------|------------|-------|
|      | Direcção Z      | Direcção Y |       |
| 1    | 7.231           | 72.310     |       |
| 2    | 19.917          | 199.174    |       |
| 3    | 39.060          | 390.601    |       |
| 4    | 64.562          | 645.622    |       |
| 5    | 96.198          | 961.976    |       |

Tabela 4.2 Propriedades associadas à viga.

| Propriedade                                  | Parâmetro variável | Valor                 |
|--|--------------------|-----------------------|
| Espessura $h$ [m]                            | PRES               | $0.182 \cdot 10^{-2}$ |
| Largura $lg$ [m]                             | PRLG               | $0.182 \cdot 10^{-1}$ |
| Densidade $\rho$ [Kg/m <sup>3</sup> ]        | PRDNS              | $0.7745 \cdot 10^4$   |
| Módulo de elasticidade $E_x$ [MPa]           | PREX               | $0.169 \cdot 10^{12}$ |
| Módulo de elasticidade $E_y = E_z$ [MPa]     | PREY               | $0.169 \cdot 10^{12}$ |
| Coeficiente de Poisson $\nu_{xy}$            | PRPXY              | 0.329                 |
| Coeficiente de Poisson $\nu_{yz} = \nu_{zx}$ | PRPYZ              | 0.329                 |
| Número de nós medidos                        | PRM                | $0.16 \cdot 10^2$     |
| Frequência que limita as iterações [Hz]      | PRFRQ              | $1.0 \cdot 10^3$      |

O número de nós influencia a qualidade dos resultados, embora neste caso não seja de uma forma significativa, dada a simplicidade do modelo. Na tabela 4.3 apresentam-se as frequências naturais obtidas com diversas densidades de malha. Na primeira coluna apresentam-se os resultados calculados analiticamente pela expressão (4.1) até cerca de 1000 Hz. Nas restantes colunas apresentam-se as frequências naturais obtidas pelo cálculo numérico em função do número de elementos utilizados. Na figura 4.2 mostra-se o erro obtido relacionando o cálculo numérico com o analítico para a primeira frequência natural.

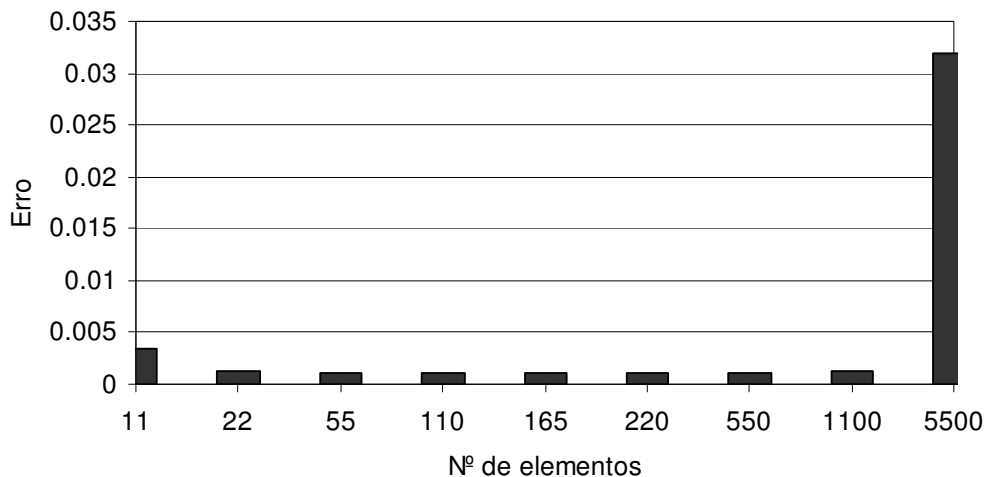


Figura 4.2 Evolução do erro obtido para a primeira frequência natural em função do número de elementos utilizado

Nota-se que para uma densidade muito pequena de elementos o erro aumenta, mas esse erro é ainda maior para uma densidade de elementos muito elevada. Para frequências mais elevadas a situação inverte-se e o erro é máximo num número reduzido de elementos,

não sendo sempre é possível obter os modos de vibração correspondentes a essas frequências. Para densidades de malha intermédias, os erros são mais baixos e muito semelhantes entre si, garantindo uma boa avaliação da resposta dinâmica da estrutura.

Tabela 4.3 Frequências naturais da viga livre até 1000 Hz, para modelos de complexidade crescente

|   | Cálculo analítico | Número de nós utilizados no cálculo numérico |         |         |         |         |         |         |         |         |
|---|-------------------|--|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|   |                   | 220  | 11      | 22      | 55      | 110     | 165     | 550     | 1100    | 5500    |
| Frequências naturais obtidas $\omega_n$ | 7.22              | 7.22   | 7.22    | 7.22    | 7.22    | 7.22    | 7.22    | 7.22    | 7.22    | 7.22    |
|   | 19.92             | 19.91  | 19.91   | 19.91   | 19.91   | 19.91   | 19.91   | 19.91   | 19.91   | 19.91   |
|   | 39.06             | 39.03  | 39.05   | 39.03   | 39.03   | 39.03   | 39.03   | 39.03   | 39.03   | 39.03   |
|   | 64.56             | 64.51  | 64.62   | 64.52   | 64.51   | 64.51   | 64.51   | 64.51   | 64.51   | 64.51   |
|   | 72.22             | 72.18  | 72.18   | 72.18   | 72.18   | 72.18   | 72.18   | 72.18   | 72.18   | 72.19   |
|   | 96.20             | 96.37  | 96.72   | 96.40   | 96.37   | 96.37   | 96.37   | 96.37   | 96.37   | 96.37   |
|   | 134.61            | 134.60                                       | 135.50  | 134.67  | 134.60  | 136.01  | 134.60  | 134.60  | 134.60  | 134.60  |
|   | 179.21            | 179.20                                       | 181.18  | 179.35  | 179.20  | 179.20  | 179.20  | 179.20  | 179.20  | 179.20  |
|   | 199.17            | 198.84                                       | 198.87  | 198.84  | 198.84  | 198.84  | 198.84  | 198.84  | 198.84  | 198.84  |
|   | 230.19            | 230.17                                       | 233.99  | 230.49  | 230.18  | 230.17  | 230.17  | 230.17  | 230.17  | 230.17  |
|   | 287.54            | 287.50                                       | 293.76  | 288.12  | 287.52  | 287.50  | 287.50  | 287.50  | 287.50  | 287.50  |
|   | 351.26            | 351.21                                       | 356.60  | 352.32  | 351.24  | 351.21  | 351.21  | 351.21  | 351.21  | 351.21  |
|   | 390.60            | 389.46                                       | 389.71  | 389.48  | 389.46  | 389.46  | 389.46  | 389.46  | 389.46  | 389.46  |
|   | 421.35            | 421.28                                       | 464.46  | 423.16  | 421.33  | 421.28  | 421.28  | 421.28  | 421.28  | 421.28  |
|   | 497.82            | 497.71                                       | 549.20  | 500.76  | 497.80  | 497.72  | 497.72  | 497.71  | 497.71  | 497.71  |
|   | 580.65            | 580.52                                       | 652.62  | 585.24  | 580.65  | 580.52  | 580.52  | 580.52  | 580.52  | 580.52  |
|   | 645.62            | 643.08                                       | 644.16  | 643.16  | 643.09  | 643.08  | 643.08  | 643.08  | 643.08  | 643.08  |
|   | 669.86            | 669.68                                       | 772.60  | 676.76  | 669.89  | 669.69  | 669.68  | 669.68  | 669.68  | 669.68  |
|   | 765.44            | 765.21                                       | 911.05  | 775.49  | 765.52  | 765.23  | 765.21  | 765.21  | 765.21  | 765.21  |
|   | 867.39            | 867.10                                       | 1070.65 | 881.58  | 867.56  | 867.13  | 867.10  | 867.10  | 867.10  | 867.10  |
|   | 961.98            | 959.38                                       | 962.81  | 959.62  | 959.38  | 959.38  | 959.38  | 959.38  | 959.38  | 959.38  |
|   | 975.72            | 975.35                                       |         | 995.15  | 975.99  | 975.39  | 975.35  | 975.34  | 975.34  | 975.34  |
|   | 1090.41           | 1089.95                                      |         | 1116.12 | 1090.86 | 1090.01 | 1089.96 | 1089.95 | 1089.95 | 1089.95 |

Para a análise do programa de melhoramento, aqui desenvolvido, são utilizados dois modelos distintos da mesma viga, com densidades de malha diferentes. Para o modelo de referência usa-se uma densidade de malha de 220 elementos cuja qualidade de resultados é muito boa. O modelo a melhorar é bastante grosseiro, sendo constituído por apenas 11 elementos. O método de melhoramento de modelos de elementos finitos desenvolvido neste trabalho é utilizado no melhoramento do modelo.

Para melhorar a rapidez de cálculo, introduz-se um ciclo limitador de frequências durante o processo de cálculo iterativo. Este limitador funciona da seguinte forma: O cálculo das frequências naturais é aqui limitado a que a mais alta não exceda 500 Hz. O

ANSYS executa os procedimentos de cálculo iterativo das frequências naturais e modos de vibração e pára quando essa frequência natural especificada for atingida. Neste exemplo são calculadas as primeiras 15 frequências naturais. A metodologia de melhoramento, implementada em MATLAB inicia-se lendo os resultados da análise dinâmica do modelo de elementos finitos e verificando se existem frequências naturais suficientes para construir a matriz *MAC*, neste caso 16. Quando o número de frequências naturais é insuficiente, o programa acrescenta mais 500 Hz ao limite máximo para a maior frequência natural, no ficheiro de entrada do ANSYS, que é de novo executado. As frequências naturais em excesso do número necessário, isto é, do número de frequências que podem ser comparadas com o modelo de referência não são tidas em conta pelo programa de melhoramento.

Para a obtenção de resultados dos modos de vibração, escolhem-se os 12 nós de definição geométrica da peça para extracção de deslocamentos na direcção *zz*, uma vez que é nesta direcção que se encontram os deslocamentos dos modos de vibração que correspondem às frequências naturais mais baixas. Com referência à figura 4.3, utilizam-se os pontos 1, 5, 8 e 12 para a extracção dos deslocamentos na direcção *yy* na qual se manifestam os modos de vibração correspondentes às frequências mais altas. Os 12 pontos medidos na direcção *zz* mais os 4 pontos medidos na direcção *yy* perfazem os 16 valores a medir neste estudo. Obtém-se assim uma matriz quadrada *MAC* de 16 x 16 elementos.

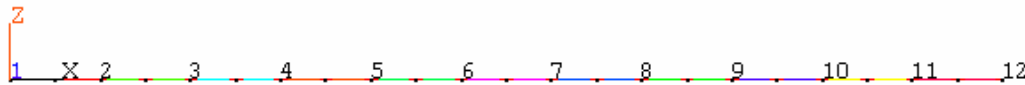


Figura 4.3 Pontos para extracção de deslocamentos modais da viga

Utilizando o programa de melhoramento executado em MATLAB conduz aos primeiros resultados. Na análise do processo de optimização verifica-se que o optimizador não utiliza todas as variáveis de projecto para a procura da solução óptima. Tal deve-se a que as diversas variáveis têm dimensões muito diferentes e o processo de variação dos seus valores, em cada iteração, não ser sensível às dimensões da variável, mas sim utilizar incrementos constantes. Desta forma, por exemplo, um incremento de 0.1 no valor do módulo de Young  $E_x$  não tem significado na evolução do resultado da função objectivo devido a que esta variável é da ordem dos  $10^{12}$ . O mesmo incremento sobre a espessura é um valor considerável. Esta situação representa uma dificuldade séria nas técnicas



numéricas. Para minimizar o impacto destas grandes diferenças na amplitude das várias variáveis, recorre-se à sua normalização (Venkataraman, 2002: 198). Neste problema, tal dificuldade é facilmente ultrapassada, dado que a função a otimizar não utiliza explicitamente os valores das variáveis de projecto. O programa de cálculo ao ser executado no ANSYS começa por alterar o valor das variáveis pela afectação de uma constante de conversão para a dimensão correcta, e só depois se prossegue com o cálculo dos valores e vectores próprios, utilizando a correcta dimensionalização das variáveis de projecto. Na tabela 4.4 apresentam-se os factores de escala utilizados nas variáveis de projecto.

Tabela 4.4 Factores de escala típicos para as variáveis de projecto

| Variável adimensionalizada utilizada no MATLAB | Factor de conversão | Variável de cálculo utilizada no ANSYS |
|--|---------------------|--|
| $PREX=.10 \cdot 10^{+1}$                       | $1 \cdot 10^{+11}$  | $E_x=PREX*1 \cdot 10^{+11}$            |
| $PREX=.10 \cdot 10^{+1}$                       | $1 \cdot 10^{+11}$  | $E_y=PREX*1 \cdot 10^{+11}$            |
| $PRDNS=.7 \cdot 10^{+1}$                       | $1 \cdot 10^{+3}$   | $\rho=PRDNS*1 \cdot 10^{+3}$           |
| $PRPXY=.2 \cdot 10^{+1}$                       | $1 \cdot 10^{-1}$   | $u_{xy}=PRPXY*1 \cdot 10^{-1}$         |
| $PRPXY=.2 \cdot 10^{+1}$                       | $1 \cdot 10^{-1}$   | $u_{yz}=PRPXY*1 \cdot 10^{-1}$         |
| $PRESF=.1 \cdot 10^{+1}$                       | $1 \cdot 10^{-3}$   | $h=PRESF*1 \cdot 10^{-3}$              |
| $PRLG1=.1 \cdot 10^{+1}$                       | $1 \cdot 10^{-2}$   | $L_{g1}=PRLG1*1 \cdot 10^{-2}$         |

O escalamento das variáveis de projecto faz com que nas primeiras iterações os incrementos sejam muito grandes nas variáveis com valores numéricos maiores, dado que são sempre afectados pelo seu elevado factor de escala. Na fase final da optimização, o optimizador pode introduzir incrementos da ordem dos  $10^{-12}$  o que possibilita um ajuste fino em todas as variáveis, incluindo as que têm valores numéricos mais elevados.

#### 4.2.1 Aplicação à viga livre

O modelo da viga de referência para o qual se determinam os modos de vibração e as frequências naturais de referência é constituído por 220 elementos. As frequências naturais do modelo de referência são apresentadas na tabela 4.5, sendo semelhantes às calculadas analiticamente, apresentadas na tabela 4.1. Embora se tenham obtido 23 frequências naturais, só as primeiras 16 são utilizadas no processo de melhoramento aqui exemplificado. O Este excesso de frequências e modos de vibração que são apresentados ao programa de melhoramento tem a ver com a possibilidade de ocorrência de frequências parasitas originadas, como por exemplo devido à massa dos sensores utilizados nos ensaios experimentais, pelo que são eliminadas. O processo de eliminação que o programa de

melhoramento utiliza é através da análise das amplitudes dos modos de vibração para cada frequência natural, como já foi referido no capítulo anterior, utilizando a equação (3.29). A identificação dos pontos de leitura utilizada na tabela 4.5 está de acordo com a figura 4.3 em que  $z$  significa leitura do deslocamento modal na direcção do eixo dos  $zz$ , nos pontos de 1 a 12, o mesmo acontecendo na direcção do eixo dos  $yy$ , cuja leitura se realiza nos pontos 1,5,8 e 12, no total das 16 leituras.

Tabela 4.5 Frequências naturais e modos de vibração do modelo de referência

| $\omega_n$ | Valor dos modos de vibração nos 16 pontos de leitura |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |          |          |          |
|------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|
|            | $Z_1$  | $Y_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $Z_4$ | $Z_5$ | $Y_5$ | $Z_6$ | $Z_7$ | $Z_8$ | $Y_8$ | $Z_9$ | $Z_{10}$ | $Z_{11}$ | $Z_{12}$ | $Y_{12}$ |
| 7.22       | -3.76  | 0     | -2.18 | -0.66 | 0.68  | 1.68  | 0     | 2.22  | 2.22  | 1.68  | 0     | 0.68  | -0.66    | -2.18    | -3.76    | 0        |
| 19.91      | 3.76   | 0     | 1.11  | -1.15 | -2.39 | -2.24 | 0     | -0.90 | 0.90  | 2.24  | 0     | 2.39  | 1.15     | -1.11    | -3.76    | 0        |
| 39.03      | 3.76   | 0     | 0.13  | -2.24 | -2.04 | 0.23  | 0     | 2.35  | 2.35  | 0.23  | 0     | -2.04 | -2.24    | 0.13     | 3.76     | 0        |
| 64.52      | 3.76   | 0     | -0.76 | -2.46 | -0.15 | 2.51  | 0     | 1.60  | -1.60 | -2.51 | 0     | 0.15  | 2.46     | 0.76     | -3.76    | 0        |
| 72.18      | 0  | 3.76  | 0     | 0     | 0     | 0     | -1.68 | 0     | 0     | 0     | -1.68 | 0     | 0        | 0        | 0        | 3.76     |
| 96.37      | 3.76   | 0     | -1.49 | -1.80 | 1.90  | 1.89  | 0     | -1.88 | -1.88 | 1.89  | 0     | 1.90  | -1.80    | -1.49    | 3.76     | 0        |
| 134.60     | 3.76   | 0     | -2.04 | -0.52 | 2.66  | -0.93 | 0     | -2.13 | 2.13  | 0.93  | 0     | -2.66 | 0.52     | 2.04     | -3.76    | 0        |
| 179.20     | 3.76   | 0     | -2.38 | 0.96  | 1.60  | -2.65 | 0     | 1.28  | 1.28  | -2.65 | 0     | 1.60  | 0.96     | -2.38    | 3.76     | 0        |
| 198.84     | 0  | -3.76 | 0     | 0     | 0     | 0     | 2.24  | 0     | 0     | 0     | -2.24 | 0     | 0        | 0        | 0        | 3.76     |
| 230.17     | 3.76   | 0     | -2.49 | 2.15  | -0.56 | -1.28 | 0     | 2.49  | -2.49 | 1.28  | 0     | 0.56  | -2.15    | 2.49     | -3.76    | 0        |
| 287.50     | 3.76   | 0     | -2.37 | 2.66  | -2.34 | 1.60  | 0     | -0.57 | -0.57 | 1.60  | 0     | -2.34 | 2.66     | -2.37    | 3.76     | 0        |
| 351.21     | 3.76   | 0     | -2.04 | 2.34  | -2.49 | 2.60  | 0     | -2.66 | 2.66  | -2.60 | 0     | 2.49  | -2.34    | 2.04     | -3.76    | 0        |
| 389.46     | 0  | -3.76 | 0     | 0     | 0     | 0     | -0.23 | 0     | 0     | 0     | -0.23 | 0     | 0        | 0        | 0        | -3.76    |
| 421.28     | -3.76  | 0     | 1.52  | -1.28 | 0.93  | -0.57 | 0     | 0.19  | 0.19  | -0.57 | 0     | 0.93  | -1.28    | 1.52     | -3.76    | 0        |
| 497.71     | 3.76   | 0     | -0.88 | -0.19 | 1.28  | -2.13 | 0     | 2.60  | -2.60 | 2.13  | 0     | -1.28 | 0.19     | 0.88     | -3.76    | 0        |
| 580.52     | 3.76   | 0     | -0.15 | -1.59 | 2.60  | -2.34 | 0     | 0.93  | 0.93  | -2.34 | 0     | 2.60  | -1.59    | -0.15    | 3.76     | 0        |
| 643.08     | 0  | -3.8  | 0     | 0     | 0     | 0     | -2.50 | 0     | 0     | 0     | 2.50  | 0     | 0        | 0        | 0        | 3.75     |
| 669.68     | 3.76   | 0     | 0.60  | -2.49 | 2.13  | 0.19  | 0     | -2.34 | 2.34  | -0.19 | 0     | -2.13 | 2.49     | -0.60    | -3.76    | 0        |
| 765.21     | 3.76   | 0     | 1.30  | -2.60 | 0.19  | 2.49  | 0     | -1.60 | -1.60 | 2.49  | 0     | 0.19  | -2.60    | 1.30     | 3.76     | 0        |
| 867.10     | 3.76   | 0     | 1.90  | -1.88 | -1.88 | 1.88  | 0     | 1.88  | -1.88 | -1.88 | 0     | 1.88  | 1.88     | -1.90    | -3.77    | 0        |
| 959.38     | 0  | -3.74 | 0     | 0     | 0     | 0     | -1.88 | 0     | 0     | 0     | -1.88 | 0     | 0        | 0        | 0        | -3.74    |
| 975.35     | -3.76  | 0     | -2.35 | 0.56  | 2.65  | 0.93  | 0     | -2.13 | -2.13 | 0.93  | 0     | 2.65  | 0.56     | -2.35    | -3.76    | 0        |
| 1089.95    | 3.76   | 0     | 2.61  | 0.93  | -1.59 | -2.65 | 0     | -1.28 | 1.28  | 2.65  | 0     | 1.59  | -0.93    | -2.61    | -3.76    | 0        |

Conhecidas as características dinâmicas do modelo de referência, o modelo de elementos finitos a melhorar é definido utilizando apenas 11 elementos. Como é esperado, este modelo não tem as mesmas frequências naturais do modelo de referência, especialmente para as frequências mais elevadas, como se pode ver na tabela 4.8.

O início do método de melhoramento corresponde à definição dos valores iniciais das variáveis e dos seus limites de variação. Os valores iniciais das variáveis de projecto são arbitrados de acordo com a tabela 4.6, na qual se utilizam valores adimensionalizados.

No algoritmo de melhoramento atribuem-se as condições de funcionalidade do otimizador para a execução dos cálculos de acordo com as opções disponíveis já abordadas no capítulo anterior, ponto 3.4. Opta-se assim por utilizar a função `fmincon.m` na versão de media escala, sendo a optimização parada ao fim de 300 avaliações caso não se tenha ainda alcançado o valor óptimo. O processo de optimização conclui-se quando a diferença entre os valores do resultado da função objectivo for menor que  $10^{-5}$  para duas iterações sucessivas. É de notar que estes parâmetros de utilização do optimizador têm influência no resultado final. Na secção 4.4.1. deste trabalho é discutida a influência destes valores quando da discussão de análise de sensibilidades. As tabelas 4.6 e 4.7 apresentam as condições iniciais consideradas para a aplicação do melhoramento do modelo de elementos finitos de viga.

Tabela 4.6 Condições iniciais para os parâmetros

| Variáveis | Limite inferior | Valor inicial | Limite superior |
|-----------|-----------------|---------------|-----------------|
| PREX      | 1               | 1             | 4               |
| PRDNS     | 1               | 1             | 9               |
| PRPXY     | 1               | 1             | 4               |
| PRESP     | 1               | 1             | 4               |
| PRLG      | 1               | 1             | 4               |

Após o processo iterativo obtêm-se os resultados, mostrados na tabelas 4.8, 4.9 e 4.10. Com estes resultados o programa constrói dois gráficos: um que representa a matriz *MAC*, de correlação entre os modos de vibração calculados e os modos de referência, mostrados na tabela 4.9, e outro que representa a correlação entre frequências naturais do modelo e de referência correspondentes à tabela 4.10. Estes gráficos representados na figura 4.4 ajudam a visualizar a qualidade dos resultados obtidos com o melhoramento. No gráfico *MAC*, figura 4.4a, as cores reproduzem o grau de qualidade do resultado obtido. Assim a cor branca representa um coeficiente da matriz *MAC* nulo em que não existe qualquer correlação entre os dois modos de vibração, enquanto um coeficiente de matriz *MAC* representado por uma cor escura representa uma elevada correlação entre modos. O objectivo ideal é obter a diagonal da matriz gráfica *MAC* toda preta e os restantes coeficientes representados a branco.

Quanto à matriz coluna de correlação entre frequências, opta-se por uma coloração inversa à da matriz *MAC* de forma a haver uma maior visibilidade. Assim coeficientes da

coluna representados por cores claras correspondem a uma elevada correlação entre frequências de ressonância de referência e do modelo de elementos finitos.

Tabela 4.7 Opções escolhidas para a funcionalidade do otimizador

| Opção          | Condição             |
|----------------|----------------------|
| 'LargeScale'   | off                  |
| Display        | iter                 |
| 'MaxFunEvals'  | 300                  |
| DiffMaxChange' | 1                    |
| DiffMinChange  | 0.1                  |
| TolFun         | $0.1 \times 10^{-4}$ |

Tabela 4.8 Frequências naturais e modos de vibração do modelo numérico após a primeira iteração

| $\omega_n$ | Modos de vibração nos 16 pontos de leitura |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                 |                 |                 |                 |
|------------|--|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|            | Z <sub>1</sub>                             | Y <sub>1</sub> | Z <sub>2</sub> | Z <sub>3</sub> | Z <sub>4</sub> | Z <sub>5</sub> | Y <sub>5</sub> | Z <sub>6</sub> | Z <sub>7</sub> | Z <sub>8</sub> | Y <sub>8</sub> | Z <sub>9</sub> | Z <sub>10</sub> | Z <sub>11</sub> | Z <sub>12</sub> | Y <sub>12</sub> |
| 8.5        | 19.1                                       | 0.0            | 11.0           | 3.3            | -3.5           | -8.5           | 0.0            | -11.2          | -11.2          | -8.5           | 0.0            | -3.5           | 3.3             | 11.0            | 19.1            | 0.0             |
| 23.4       | 19.1                                       | 0.0            | 5.6            | -5.8           | -12.1          | -11.4          | 0.0            | -4.6           | 4.6            | 11.4           | 0.0            | 12.1           | 5.8             | -5.6            | -19.1           | 0.0             |
| 45.9       | 19.1                                       | 0.0            | 0.6            | -11.4          | -10.3          | 1.2            | 0.0            | 11.9           | 11.9           | 1.2            | 0.0            | -10.3          | -11.4           | 0.6             | 19.1            | 0.0             |
| 76.0       | 19.1                                       | 0.0            | -3.8           | -12.5          | -0.8           | 12.7           | 0.0            | 8.1            | -8.1           | -12.7          | 0.0            | 0.8            | 12.5            | 3.8             | -19.1           | 0.0             |
| 84.9       | 0.0  | 19.1           | 0.0            | 0.0            | 0.0            | 0.0            | -8.5           | 0.0            | 0.0            | 0.0            | -8.5           | 0.0            | 0.0             | 0.0             | 0.0             | 19.1            |
| 113.8      | 19.2                                       | 0.0            | -7.6           | -9.2           | 9.7            | 9.6            | 0.0            | -9.6           | -9.6           | 9.6            | 0.0            | 9.7            | -9.2            | -7.6            | 19.2            | 0.0             |
| 159.4      | 19.3                                       | 0.0            | -10.5          | -2.6           | 13.7           | -4.8           | 0.0            | -10.9          | 10.9           | 4.8            | 0.0            | -13.7          | 2.6             | 10.5            | -19.3           | 0.0             |
| 213.1      | 19.4                                       | 0.0            | -12.4          | 5.1            | 8.2            | -13.8          | 0.0            | 6.6            | 6.6            | -13.8          | 0.0            | 8.2            | 5.1             | -12.4           | 19.4            | 0.0             |
| 234.1      | 0.0  | -19.1          | 0.0            | 0.0            | 0.0            | 0.0            | 11.4           | 0.0            | 0.0            | 0.0            | -11.4          | 0.0            | 0.0             | 0.0             | 0.0             | 19.1            |
| 275.3      | 19.5                                       | 0.0            | -13.1          | 11.4           | -3.1           | -6.6           | 0.0            | 13.1           | -13.1          | 6.6            | 0.0            | 3.1            | -11.4           | 13.1            | -19.5           | 0.0             |
| 345.6      | -19.5                                      | 0.0            | 12.5           | -14.4          | 12.8           | -8.8           | 0.0            | 3.1            | 3.1            | -8.8           | 0.0            | 12.8           | -14.4           | 12.5            | -19.5           | 0.0             |
| 419.5      | 17.4                                       | 0.0            | -9.9           | 12.1           | -13.3          | 14.2           | 0.0            | -14.6          | 14.6           | -14.2          | 0.0            | 13.3           | -12.0           | 9.9             | -17.4           | 0.0             |
| 459.1      | 0.0  | 19.1           | 0.0            | 0.0            | 0.0            | 0.0            | 1.2            | 0.0            | 0.0            | 0.0            | 1.1            | 0.0            | 0.0             | 0.0             | 0.0             | 19.1            |
| 546.4      | 17.7                                       | 0.0            | -6.9           | 5.9            | -4.3           | 2.7            | 0.0            | -0.9           | -0.9           | 2.7            | 0.0            | -4.3           | 5.9             | -6.9            | 17.7            | 0.0             |
| 646.1      | 20.2                                       | 0.0            | -4.6           | -0.3           | 5.6            | -9.8           | 0.0            | 12.1           | -12.1          | 9.8            | 0.0            | -5.6           | 0.3             | 4.6             | -20.2           | 0.0             |
| 759.4      | 0.0  | -19.1          | 0.0            | 0.0            | 0.0            | 0.0            | -12.7          | 0.0            | 0.0            | 0.0            | 12.7           | 0.0            | 0.0             | 0.0             | 0.0             | 19.1            |
| 767.8      | -20.8                                      | 0.0            | 0.9            | 7.6            | -12.5          | 11.3           | 0.0            | -4.5           | -4.5           | 11.3           | 0.0            | -12.5          | 7.6             | 0.9             | -20.8           | 0.0             |
| 908.9      | 21.1                                       | 0.0            | 3.1            | -12.1          | 10.3           | 1.0            | 0.0            | -11.4          | 11.4           | -1.0           | 0.0            | -10.3          | 12.1            | -3.1            | -21.1           | 0.0             |
| 1071.9     | 21.3                                       | 0.0            | 6.6            | -12.4          | 0.7            | 12.0           | 0.0            | -7.6           | -7.6           | 12.0           | 0.0            | 0.7            | -12.4           | 6.6             | 21.3            | 0.0             |
| 1136.1     | 0.0  | -19.2          | 0.0            | 0.0            | 0.0            | 0.0            | -9.6           | 0.0            | 0.0            | 0.0            | -9.6           | 0.0            | 0.0             | 0.0             | 0.0             | -19.2           |
| 1259.7     | 21.4                                       | 0.0            | 9.2            | -8.5           | -8.9           | 8.6            | 0.0            | 8.7            | -8.7           | -8.6           | 0.0            | 8.9            | 8.5             | -9.2            | -21.4           | 0.0             |

Pelos resultados obtidos e expressos pela matriz *MAC*, figura 4.4 uma boa correlação entre modos de vibração dos dois modelos, excepto no modo correspondente à frequência mais elevada. Para este modo, correspondente à frequência natural de 580.5 Hz do modelo de referência a correlação é nula, tabela 4.10. Na tabela 4.11 mostra-se este modo de vibração nos dois modelos e também os modos correspondentes às frequências

imediatamente inferior e superior. Observa-se a fraca qualidade da forma do modo obtido com o modelo de elementos finitos mais grosseiro, isto é o que é constituído por 11 elementos.

Tabela 4.9 Resultados da correlação entre os modos de vibração após a primeira iteração

$MAC_i$

| Modelo de referência (pontos de 1 a 16) | Modelo numérico (pontos de 1 a 16) |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
|---|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---|
|   | 1.00                               | 0    | 0.10 | 0    | 0    | 0.11 | 0    | 0.12 | 0    | 0    | 0.12 | 0    | 0    | 0.27 | 0    | 0 |
|   | 0                                  | 1.00 | 0    | 0.11 | 0    | 0    | 0.12 | 0    | 0    | 0.12 | 0    | 0.09 | 0    | 0    | 0.24 | 0 |
|   | 0.10                               | 0    | 1.00 | 0    | 0    | 0.12 | 0    | 0.13 | 0    | 0    | 0.13 | 0    | 0    | 0.29 | 0    | 0 |
|   | 0                                  | 0.11 | 0    | 1.00 | 0    | 0    | 0.13 | 0    | 0    | 0.13 | 0    | 0.10 | 0    | 0    | 0.27 | 0 |
|   | 0                                  | 0    | 0    | 0    | 1.00 | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0.79 | 0    | 0    | 0 |
|   | 0.11                               | 0    | 0.12 | 0    | 0    | 1.00 | 0    | 0.14 | 0    | 0    | 0.14 | 0    | 0    | 0.33 | 0    | 0 |
|   | 0                                  | 0.12 | 0    | 0.13 | 0    | 0    | 1.00 | 0    | 0    | 0.15 | 0    | 0.11 | 0    | 0    | 0.32 | 0 |
|   | 0.12                               | 0    | 0.13 | 0    | 0    | 0.14 | 0    | 1.00 | 0    | 0    | 0.15 | 0    | 0    | 0.40 | 0    | 0 |
|   | 0                                  | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1.00 | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0.19 | 0 |
|   | 0                                  | 0.13 | 0    | 0.14 | 0    | 0    | 0.15 | 0    | 0    | 1.00 | 0    | 0.13 | 0    | 0    | 0.69 | 0 |
|   | 0.12                               | 0    | 0.13 | 0    | 0    | 0.15 | 0    | 0.17 | 0    | 0    | 1.00 | 0    | 0    | 0.87 | 0    | 0 |
|   | 0                                  | 0.11 | 0    | 0.12 | 0    | 0    | 0.14 | 0    | 0    | 0.17 | 0    | 1.00 | 0    | 0    | 0.01 | 0 |
|   | 0                                  | 0    | 0    | 0    | 0.79 | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1.00 | 0    | 0    | 0 |
|   | 0.26                               | 0    | 0.29 | 0    | 0    | 0.32 | 0    | 0.40 | 0    | 0    | 0.86 | 0    | 0    | 1.00 | 0    | 0 |
|   | 0                                  | 0.21 | 0    | 0.23 | 0    | 0    | 0.29 | 0    | 0    | 0.64 | 0    | 0.01 | 0    | 0    | 0.99 | 0 |
|   | 0.20                               | 0    | 0.23 | 0    | 0    | 0.29 | 0    | 0.63 | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0.13 | 0    | 0 |

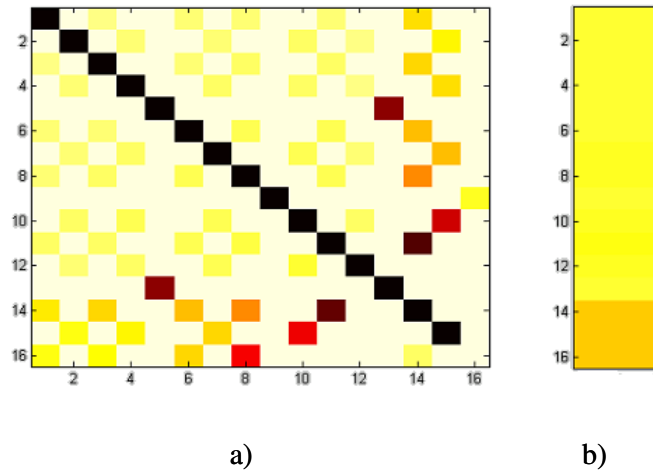


Figura 4.4 Representação gráfica da correlação entre: a) modos de vibração ( $MAC$ ) e b) entre frequências naturais, após a primeira iteração.

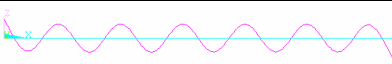
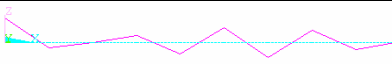
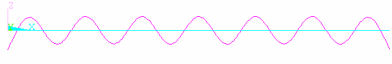
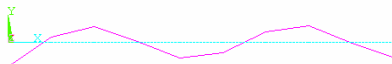
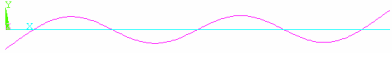
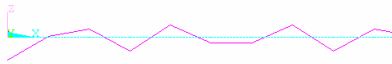
O modelo de elementos finitos, que é relativamente grosseiro, com 11 elementos, não permite que os seus modos de vibração associados às frequências mais altas tenham a

complexidade necessária para uma boa correlação com os modos de referência. Outra observação relevante é que o modo de vibração no modelo de referência correspondente a 580 Hz é muito diferente do modo de vibração a 759 Hz no modelo de elementos finitos. Este último, tem uma boa semelhança com o modo de vibração correspondente à frequência natural de 643 HZ do modelo de referência, sugerindo assim uma permuta de frequências e modos de vibração para uma melhor correlação do conjunto.

Tabela 4.10 Frequências naturais obtidas nas simulações e de referência:

| Modelos    |                   | Correlação |
|------------|-------------------|------------|
| Referência | Elementos finitos |            |
| 7.2        | 8.5               | 0.176      |
| 19.9       | 23.4              | 0.176      |
| 39.0       | 45.9              | 0.177      |
| 64.5       | 76.0              | 0.178      |
| 72.2       | 84.9              | 0.177      |
| 96.4       | 113.8             | 0.181      |
| 134.6      | 159.4             | 0.184      |
| 179.2      | 213.1             | 0.189      |
| 198.8      | 234.1             | 0.177      |
| 230.2      | 275.2             | 0.196      |
| 287.5      | 345.6             | 0.202      |
| 351.2      | 419.5             | 0.194      |
| 389.5      | 459.1             | 0.179      |
| 421.3      | 546.4             | 0.297      |
| 497.7      | 646.1             | 0.298      |
| 580.5      | 759.4             | 0.308      |

Tabela 4.11 Comparação entre alguns modos de vibração após a primeira iteração

| Modelo de referência com 220 elementos de malha |   | Modelo numérico com 11 elementos de malha |  |
|---|---|---|--|
| $\omega_n$                                      | Modo de vibração  | $\omega_n$                                | Modo de vibração   |
| 497.7   |  | 646.1                                     |  |
| 580.5   |  | 759.4                                     |  |
| 643.1   |  | 767.8                                     |  |

Os resultados obtidos no melhoramento do modelo de elementos finitos, com 11 elementos, permite concluir que este modelo é demasiado grosseiro se for pretendido que os modos de vibração associados às frequências mais elevadas estejam bem

correlacionados com as de referência. Um novo estudo com um modelo constituído por 22 elementos é utilizado, com o intuito de permitir a obtenção de modos de vibração com melhor qualidade. Partindo das mesmas condições iniciais usadas para o modelo de 11 elementos, a primeira avaliação conduz aos resultados mostrados nas tabelas 4.12, 4.13 e 4.14.

Tabela 4.12 Frequências naturais e modos de vibração do modelo numérico após a primeira iteração

| $\omega_n$ | Deslocamento nos 16 pontos de leitura |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                 |                 |                 |                 |
|------------|---------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|            | Z <sub>1</sub>                        | Y <sub>1</sub> | Z <sub>2</sub> | Z <sub>3</sub> | Z <sub>4</sub> | Z <sub>5</sub> | Y <sub>5</sub> | Z <sub>6</sub> | Z <sub>7</sub> | Z <sub>8</sub> | Y <sub>8</sub> | Z <sub>9</sub> | Z <sub>10</sub> | Z <sub>11</sub> | Z <sub>12</sub> | Y <sub>12</sub> |
| 8.5        | 19.1                                  | 0              | 11.0           | 3.3            | -3.5           | -8.5           | 0              | -11.2          | -11.2          | -8.5           | 0              | -3.5           | 3.3             | 11.0            | 19.1            | 0               |
| 23.4       | 19.1                                  | 0              | 5.6            | -5.8           | -12.1          | -11.4          | 0              | -4.6           | 4.6            | 11.4           | 0              | 12.1           | 5.8             | -5.6            | -19.1           | 0               |
| 45.9       | -19.1                                 | 0              | -0.6           | 11.3           | 10.3           | -1.2           | 0              | -11.9          | -11.9          | -1.2           | 0              | 10.3           | 11.3            | -0.6            | -19.1           | 0               |
| 75.9       | 19.1                                  | 0              | -3.8           | -12.5          | -0.8           | 12.7           | 0              | 8.1            | -8.1           | -12.7          | 0              | 0.8            | 12.5            | 3.8             | -19.1           | 0               |
| 84.9       | 0                                     | 19.1           | 0              | 0              | 0              | 0              | -8.5           | 0              | 0              | 0              | -8.5           | 0              | 0               | 0               | 0               | 19.1            |
| 113.4      | -19.1                                 | 0              | 7.6            | 9.1            | -9.6           | -9.6           | 0              | 9.5            | 9.5            | -9.6           | 0              | -9.6           | 9.1             | 7.6             | -19.1           | 0               |
| 158.4      | 19.1                                  | 0              | -10.4          | -2.6           | 13.5           | -4.7           | 0              | -10.8          | 10.8           | 4.7            | 0              | -13.5          | 2.6             | 10.4            | -19.1           | 0               |
| 211.0      | 19.1                                  | 0              | -12.1          | 4.9            | 8.1            | -13.5          | 0              | 6.5            | 6.5            | -13.5          | 0              | 8.1            | 4.9             | -12.1           | 19.1            | 0               |
| 234.1      | 0                                     | -19.1          | 0              | 0              | 0              | 0              | 11.4           | 0              | 0              | 0              | -11.4          | 0              | 0               | 0               | 0               | 19.1            |
| 271.1      | 19.1                                  | 0              | -12.6          | 10.9           | -2.9           | -6.5           | 0              | 12.7           | -12.7          | 6.5            | 0              | 2.9            | -10.9           | 12.6            | -19.1           | 0               |
| 338.9      | -19.2                                 | 0              | 12.1           | -13.6          | 11.9           | -8.1           | 0              | 2.9            | 2.9            | -8.1           | 0              | 11.9           | -13.6           | 12.1            | -19.2           | 0               |
| 414.5      | 19.2                                  | 0              | -10.4          | 11.9           | -12.7          | 13.3           | 0              | -13.5          | 13.5           | -13.3          | 0              | 12.7           | -11.9           | 10.4            | -19.2           | 0               |
| 458.8      | 0                                     | 19.1           | 0              | 0              | 0              | 0              | 1.2            | 0              | 0              | 0              | 1.2            | 0              | 0               | 0               | 0               | 19.1            |
| 497.8      | -19.2                                 | 0              | 7.8            | -6.5           | 4.7            | -2.9           | 0              | 1.0            | 1.0            | -2.9           | 0              | 4.7            | -6.5            | 7.8             | -19.2           | 0               |
| 589.1      | 19.3                                  | 0              | -4.5           | -1.0           | 6.6            | -10.9          | 0              | 13.3           | -13.3          | 10.9           | 0              | -6.6           | 1.0             | 4.5             | -19.3           | 0               |
| 688.5      | -19.3                                 | 0              | 0.7            | 8.3            | -13.4          | 12.0           | 0              | -4.8           | -4.8           | 12.0           | 0              | -13.4          | 8.3             | 0.7             | -19.3           | 0               |
| 758.2      | 0                                     | -19.1          | 0              | 0              | 0              | 0              | -12.7          | 0              | 0              | 0              | 12.7           | 0              | 0               | 0               | 0               | 19.1            |
| 796.2      | 19.4                                  | 0              | 3.2            | -12.9          | 11.0           | 1.0            | 0              | -12.1          | 12.1           | -1.0           | 0              | -11.0          | 12.9            | -3.2            | -19.4           | 0               |
| 912.4      | -19.5                                 | 0              | -6.9           | 13.5           | -0.9           | -13.0          | 0              | 8.3            | 8.3            | -13.0          | 0              | -0.9           | 13.5            | -6.9            | -19.5           | 0               |
| 1037.2     | 19.6                                  | 0              | 10.1           | -9.8           | -10.0          | 9.8            | 0              | 9.9            | -9.9           | -9.8           | 0              | 10.0           | 9.8             | -10.1           | -19.6           | 0               |

De salientar a grande melhoria na qualidade dos resultados, obtendo-se uma matriz *MAC* com uma diagonal óptima, mostrando uma boa correlação deste novo modelo de elementos finitos com o de referência. A mesma conclusão é tirada por observação na figura 4.5, onde se apresentam os códigos de cor associados à correlação de modos e frequências naturais.

Observando com mais detalhe a configuração dos novos modos de vibração obtidos com o modelo de 22 elementos finitos, mostrados na tabela 4.15 para as frequências mais elevadas verifica-se que estes reproduzem bem as do modelo de referência. A correlação das frequências naturais é de pior qualidade com erros que atingem 18.6 %. Este é o

aspecto para o qual o melhoramento é mais necessário. Conclui-se assim que os 22 elementos considerados são suficientes para permitir uma melhoria da qualidade desse modelo.

Tabela 4.13 Resultados da correlação entre os modos de vibração após a primeira iteração

$MAC_i$

|   | Modelo numérico (pontos de 1 a 16) |      |      |      |   |      |      |      |   |      |      |      |      |      |      |      |
|---|------------------------------------|------|------|------|---|------|------|------|---|------|------|------|------|------|------|------|
| Modelo de referência (pontos de 1 a 16) | 1                                  | 0    | 0.10 | 0    | 0 | 0.11 | 0    | 0.12 | 0 | 0    | 0.12 | 0    | 0    | 0.26 | 0    | 0.20 |
|   | 0                                  | 1    | 0    | 0.11 | 0 | 0    | 0.12 | 0    | 0 | 0.13 | 0    | 0.11 | 0    | 0    | 0.21 | 0    |
|   | 0.10                               | 0    | 1    | 0    | 0 | 0.12 | 0    | 0.13 | 0 | 0    | 0.13 | 0    | 0    | 0.29 | 0    | 0.23 |
|   | 0                                  | 0.11 | 0    | 1    | 0 | 0    | 0.13 | 0    | 0 | 0.14 | 0    | 0.12 | 0    | 0    | 0.23 | 0    |
|   | 0                                  | 0    | 0    | 0    | 1 | 0    | 0    | 0    | 0 | 0    | 0    | 0    | 0.79 | 0    | 0    | 0    |
|   | 0.11                               | 0    | 0.12 | 0    | 0 | 1    | 0    | 0.14 | 0 | 0    | 0.15 | 0    | 0    | 0.33 | 0    | 0.28 |
|   | 0                                  | 0.12 | 0    | 0.13 | 0 | 0    | 1    | 0    | 0 | 0.15 | 0    | 0.14 | 0    | 0    | 0.29 | 0    |
|   | 0.12                               | 0    | 0.13 | 0    | 0 | 0.14 | 0    | 1    | 0 | 0    | 0.17 | 0    | 0    | 0.40 | 0    | 0.63 |
|   | 0                                  | 0    | 0    | 0    | 0 | 0    | 0    | 0    | 1 | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |
|   | 0                                  | 0.13 | 0    | 0.14 | 0 | 0    | 0.15 | 0    | 0 | 1    | 0    | 0.17 | 0    | 0    | 0.64 | 0    |
|   | 0.12                               | 0    | 0.13 | 0    | 0 | 0.15 | 0    | 0.17 | 0 | 0    | 1    | 0    | 0    | 0.87 | 0    | 0    |
|   | 0                                  | 0.11 | 0    | 0.12 | 0 | 0    | 0.14 | 0    | 0 | 0.17 | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    |
|   | 0                                  | 0    | 0    | 0    | 0 | 0.79 | 0    | 0    | 0 | 0    | 0    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    |
|   | 0.26                               | 0    | 0.29 | 0    | 0 | 0.32 | 0    | 0.40 | 0 | 0    | 0.87 | 0    | 0    | 1    | 0    | 0.12 |
|   | 0                                  | 0.21 | 0    | 0.23 | 0 | 0    | 0.29 | 0    | 0 | 0.65 | 0    | 0    | 0    | 0    | 1    | 0    |
|   | 0.20                               | 0    | 0.23 | 0    | 0 | 0.29 | 0    | 0.63 | 0 | 0    | 0    | 0    | 0    | 0.12 | 0    | 1    |

Para ajuizar a qualidade da melhoria, a equação (3.28) é a função objectivo cuja minimização é feita durante o processo de melhoramento do modelo.

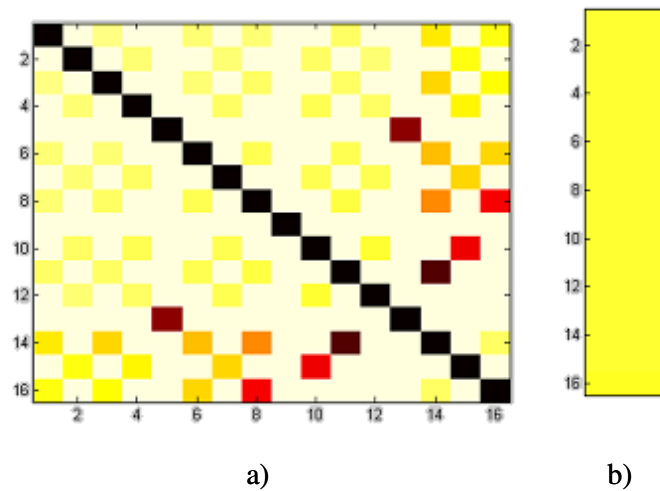


Figura 4.5 Representação gráfica da correlação entre: a) modos de vibração ( $MAC$ ) e b) entre frequências naturais, após a primeira iteração.

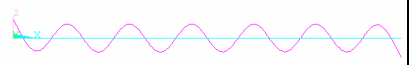
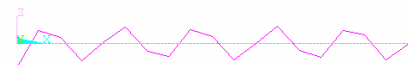
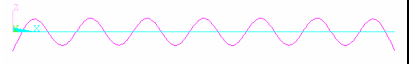
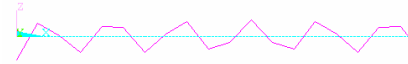
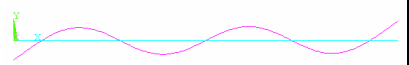
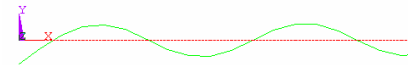


Realizado o melhoramento, o otimizador executou 13 iterações e 152 avaliações da função objectivo, tendo o processo terminado quando se atinge o mínimo da função objectivo, dentro da tolerância estabelecida para o problema.

Tabela 4.14 Frequências naturais obtidas na análise

| Modelo     |                   | Correlação |
|------------|-------------------|------------|
| Referência | Elementos finitos |            |
| 7.2        | 8.5               | 0.176      |
| 19.9       | 23.4              | 0.176      |
| 39.0       | 45.9              | 0.176      |
| 64.5       | 75.9              | 0.176      |
| 72.2       | 84.9              | 0.177      |
| 96.4       | 113.4             | 0.177      |
| 134.6      | 158.4             | 0.177      |
| 179.2      | 211.0             | 0.177      |
| 198.8      | 234.1             | 0.177      |
| 230.2      | 271.1             | 0.178      |
| 287.5      | 338.9             | 0.179      |
| 351.2      | 414.5             | 0.18       |
| 389.5      | 458.8             | 0.178      |
| 421.3      | 497.8             | 0.182      |
| 497.7      | 589.1             | 0.184      |
| 580.5      | 688.5             | 0.186      |

Tabela 4.15 Comparação entre alguns modos de vibração após a primeira iteração

| Modelo de referência com 220 elementos de malha |   | Modelo numérico com 22 elementos de malha |  |
|---|---|---|--|
| $\omega_n$                                      | Modo de vibração  | $\omega_n$                                | Modo de vibração   |
| 497.714   |  | 589.095                                   |  |
| 580.516   |  | 688.499                                   |  |
| 643.083   |  | 758.217                                   |  |

Na tabela 4.16 apresentam-se os resultados do modelo de elementos finitos original obtidos durante o processo de optimização e na última linha os resultados finais do processo de melhoramento. As primeiras 5 colunas desta tabela representam os valores dos parâmetros variáveis que o otimizador utiliza com o objectivo de obter a solução óptima, respectivamente o módulo de elasticidade, a densidade, o coeficiente de Poisson, a espessura e largura da viga. As colunas seguintes representam resultados parciais e o valor

da função objectivo, ou seja:  $SCFreq$  é o somatório das correlações entre as diversas frequências obtido pelo numerador da terceira parcela da função objectivo, fórmula 3.28;  $sdMAC$  é o somatório dos valores da diagonal principal da matriz  $MAC$ , numerador da primeira parcela da função objectivo;  $sfdMAC$  é o somatório dos valores fora da diagonal da matriz  $MAC$ , numerador da segunda parcela da função objectivo;  $Corr-Freq$  é o valor da última parcela da função objectivo e finalmente  $Fobjectivo$  é o valor total da função objectivo, fórmula 3.28, calculado avaliação a avaliação.

Tabela 4.16 Evolução de resultados durante o processo de optimização.

| $E_{xx}$<br>$10^{11}$ | $\rho \cdot 10^3$ | $u_{xy} \cdot 10^{-1}$ | $h \cdot 10^{-3}$ | $I_g \cdot 10^{-2}$ | SCFreq   | sdMAC       | sfdMAC    | Corr-<br>freq | Fobjectivo |
|-----------------------|-------------------|------------------------|-------------------|---------------------|----------|-------------|-----------|---------------|------------|
| 1                     | 1                 | 1                      | 1                 | 1                   | 644.501  | 15.99998790 | 16.731981 | 16.000        | 15.06250   |
| 1.1                   | 1                 | 1                      | 1                 | 1                   | 850.192  | 15.99998791 | 16.731984 | 21.157        | 20.21928   |
| 1                     | 1.1               | 1                      | 1                 | 1                   | 448.382  | 15.99998790 | 16.731980 | 11.083        | 10.14571   |
| 1                     | 1                 | 1.1                    | 1                 | 1                   | 644.501  | 15.99998790 | 16.731981 | 16.000        | 15.06250   |
| ...                   | ...               | ...                    | ...               | ...                 | ...      | ...         | ...       | ...           | ...        |
| 1                     | 2                 | 1                      | 1                 | 1.1                 | 534.878  | 15.99998796 | 16.731983 | 13.538        | 12.60037   |
| 2.4728                | 9                 | 1                      | 3.4485            | 1.5683182           | 3847.527 | 15.84545420 | 16.344747 | 90.341        | 89.41217   |
| 1.7364                | 5.5               | 1                      | 2.2242            | 1.2841591           | 1484.017 | 15.99998585 | 16.731175 | 36.950        | 36.01213   |
| 1.3682                | 3.75              | 1                      | 1.6121            | 1.1420795           | 560.735  | 15.99998716 | 16.731697 | 13.926        | 12.98825   |
| 1.4682                | 3.75              | 1                      | 1.6121            | 1.1420795           | 661.596  | 15.99998716 | 16.731697 | 16.430        | 15.49209   |
| 1.3682                | 3.6500            | 1                      | 1.6121            | 1.1420795           | 598.961  | 15.99998716 | 16.731699 | 14.875        | 13.93720   |
| 1.3682                | 3.75              | 5                      | 1.6121            | 1.1420795           | 560.735  | 15.99998716 | 16.731698 | 13.926        | 12.98825   |
| 1.3682                | 3.75              | 1                      | 1.7121            | 1.1420795           | 768.232  | 15.99998693 | 16.731590 | 19.103        | 18.16586   |
| 1.3682                | 3.75              | 1                      | 1.6121            | 1.2420795           | 513.830  | 15.99998717 | 16.731663 | 12.724        | 11.78676   |
| ...                   | ...               | ...                    | ...               | ...                 | ...      | ...         | ...       | ...           | ...        |
| 2.3751                | 3.2927            | 1.00003                | 1                 | 1                   | 10.1606  | 15.99998793 | 16.731995 | 0.145         | -0.79219   |

Analisando agora a evolução dos valores propostos pelo optimizador para os parâmetros durante os primeiros passos do processo de optimização, observa-se que após as primeiras análises com incrementos de 0.1 em cada variável, o optimizador escolhe a variável densidade para analisar a evolução dos resultados em vários pontos do intervalo definido para essa variável. Esta escolha recai na variável que melhor contribui para a minimização da função objectivo. No entanto a solução encontrada pelo programa apresenta uma boa correlação entre modelos como se pode observar na figura 4.6, uma vez que o diagrama de correlação de frequências é praticamente todo branco. Na tabela 4.17 apresentam-se os resultados finais do processo de melhoramento. Como conclusão verifica-se uma muito boa aproximação, em termos dinâmicos, entre o novo modelo aqui melhorado e o modelo de referência.

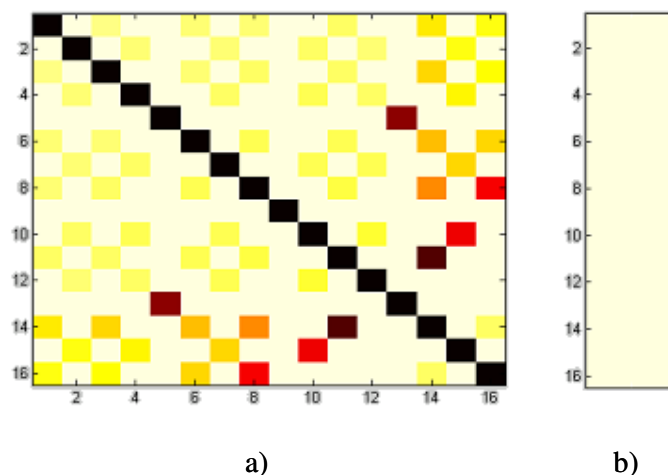


Figura 4.6 Representação gráfica da correlação, após a obtenção da solução óptima, entre:  
a) os modos de vibração (MAC) e b) as frequências naturais.

Tabela 4.17 Resultados finais do processo de otimização

| $\omega_n$ | modos de vibração do modelo otimizado |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                 |                 |                 |                 |
|------------|---------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|            | Z <sub>1</sub>                        | Y <sub>1</sub> | Z <sub>2</sub> | Z <sub>3</sub> | Z <sub>4</sub> | Z <sub>5</sub> | Y <sub>5</sub> | Z <sub>6</sub> | Z <sub>7</sub> | Z <sub>8</sub> | Y <sub>8</sub> | Z <sub>9</sub> | Z <sub>10</sub> | Z <sub>11</sub> | Z <sub>12</sub> | Y <sub>12</sub> |
| 7.2        | -10.5                                 | 0              | -6.1           | -1.8           | 1.9            | 4.7            | 0              | 6.2            | 6.2            | 4.7            | 0              | 1.9            | -1.8            | -6.1            | -10.5           | 0               |
| 19.9       | 10.5                                  | 0              | 3.1            | -3.2           | -6.7           | -6.3           | 0              | -2.5           | 2.5            | 6.3            | 0              | 6.7            | 3.2             | -3.1            | -10.5           | 0               |
| 39.0       | -10.5                                 | 0              | -0.4           | 6.3            | 5.7            | -0.6           | 0              | -6.6           | -6.6           | -0.6           | 0              | 5.7            | 6.3             | -0.4            | -10.5           | 0               |
| 64.5       | 10.5                                  | 0              | -2.1           | -6.9           | -0.4           | 7.0            | 0              | 4.5            | -4.5           | -7.0           | 0              | 0.4            | 6.9             | 2.1             | -10.5           | 0               |
| 72.1       | 0                                     | 10.5           | 0              | 0              | 0              | 0              | -4.7           | 0              | 0              | 0              | -4.7           | 0              | 0               | 0               | 0               | 10.5            |
| 96.3       | 10.5                                  | 0              | -4.2           | -5.0           | 5.3            | 5.3            | 0              | -5.3           | -5.3           | 5.3            | 0              | 5.3            | -5.0            | -4.2            | 10.5            | 0               |
| 134.5      | 10.5                                  | 0              | -5.7           | -1.5           | 7.4            | -2.6           | 0              | -6.0           | 6.0            | 2.6            | 0              | -7.4           | 1.5             | 5.7             | -10.5           | 0               |
| 179.2      | 10.5                                  | 0              | -6.7           | 2.7            | 4.5            | -7.4           | 0              | 3.6            | 3.6            | -7.4           | 0              | 4.5            | 2.7             | -6.7            | 10.5            | 0               |
| 198.8      | 0                                     | -10.5          | 0              | 0              | 0              | 0              | 6.3            | 0              | 0              | 0              | -6.3           | 0              | 0               | 0               | 0               | 10.5            |
| 230.3      | 10.5                                  | 0              | -7.0           | 6.0            | -1.6           | -3.6           | 0              | 7.0            | -7.0           | 3.6            | 0              | 1.6            | -6.0            | 7.0             | -10.5           | 0               |
| 287.9      | 10.6                                  | 0              | -6.6           | 7.5            | -6.6           | 4.5            | 0              | -1.6           | -1.6           | 4.5            | 0              | -6.6           | 7.5             | -6.6            | 10.6            | 0               |
| 352.0      | 10.6                                  | 0              | -5.7           | 6.6            | -7.0           | 7.3            | 0              | -7.5           | 7.5            | -7.3           | 0              | 7.0            | -6.6            | 5.7             | -10.6           | 0               |
| 389.7      | 0                                     | 10.5           | 0              | 0              | 0              | 0              | 0.6            | 0              | 0              | 0              | 0.6            | 0              | 0               | 0               | 0               | 10.5            |
| 422.8      | 10.6                                  | 0              | -4.3           | 3.6            | -2.6           | 1.6            | 0              | -0.53          | -0.53          | 1.59           | 0              | -2.6           | 3.6             | -4.3            | 10.6            | 0               |
| 500.3      | 10.6                                  | 0              | -2.5           | -0.6           | 3.6            | -6.0           | 0              | 7.35           | -7.35          | 6.03           | 0              | -3.6           | 0.6             | 2.5             | -10.6           | 0               |
| 584.8      | 10.7                                  | 0              | -0.4           | -4.6           | 7.4            | -6.6           | 0              | 2.64           | 2.64           | -6.63          | 0              | 7.4            | -4.6            | -0.4            | 10.7            | 0               |

## 4.2.2 Variação nos Parâmetros e o seu Efeito na Otimização

No exemplo em estudo utilizam-se apenas 5 variáveis para a obtenção do melhoramento do modelo. A única diferença entre os modelos reside na quantidade dos elementos finitos utilizados na sua construção. Apesar disso, a solução óptima encontrada conduz a um modelo de elementos finitos que representa muito bem o modelo de

referência. No entanto, analisa-se aqui a influência de cada parâmetro na evolução do problema para a solução já conhecida. Analisa-se ainda a utilização de outros pontos de partida do modelo de elementos finitos com o objectivo de observar o seu comportamento, com vista a encontrar uma outra solução óptima, porventura ainda melhor.

Para comparar soluções do mesmo problema cria-se a *função objectivo corrigida* que difere da função objectivo apresentada na adimensionalização da equação 3.38, porque na *função objectivo corrigida* a adimensionalização é feita sempre com o valor obtido a partir das mesmas variáveis iniciais. Para analisar o efeito de cada parâmetro, independentemente dos restantes, parte-se da solução óptima obtida e atribuiu-se um campo de variação a cada variável individualmente, mantendo-se fixas as restantes invariáveis. Nestas condições, o programa procura de novo um valor óptimo para a variável em causa, dentro do campo estabelecido e espera-se que termine no valor obtido na solução óptima. Este processo conduz a um conjunto de resultados intermédios que são utilizados para se obter a evolução do processo e construir gráficos elucidativos da evolução de cada parâmetro. Começando pelo parâmetro  $E_x$ , módulo de elasticidade, observa-se que a evolução dos resultados da função objectivo converge de acordo com o gráfico mostrado na figura 4.7. Os valores dos parâmetros de projecto apresentam-se na tabela 4.18.

Tabela 4.18 Parâmetros envolvidos admitindo apenas variação de PREX

| Parâmetro  | Limite inferior | Valor inicial | Limite superior |
|--|-----------------|---------------|-----------------|
| Módulo de Elasticidade $E_x$ [ $\times 10^{11}$ Pa]  | 1               | 1             | 5               |
| Densidade $\rho$ [ $\times 10^3$ Kg/m <sup>3</sup> ] | 3.29            | 3.29          | 3.29            |
| Coeficiente de Poisson $\nu_{xy}$                    | 1.00            | 1.00          | 1.00            |
| Espessura $h$ [ $\times 10^{-3}$ m]                  | 1               | 1             | 1               |
| Largura $l_g$ [ $\times 10^{-2}$ m]                  | 1               | 1             | 1               |

Para a análise a evolução do parâmetro  $\rho$ , densidade, o procedimento é idêntico e o resultado é mostrado no gráfico da figura 4.8 relativo aos valores mostrados na tabela 4.19. Nota-se com mais clareza a não linearidade da curva, mas a convergência continua a verificar-se no ponto onde foi obtido o valor óptimo da função objectivo. Como no caso anterior há uma variação elevada na função objectivo quando se afasta do ponto onde a variável corresponde ao valor óptimo.

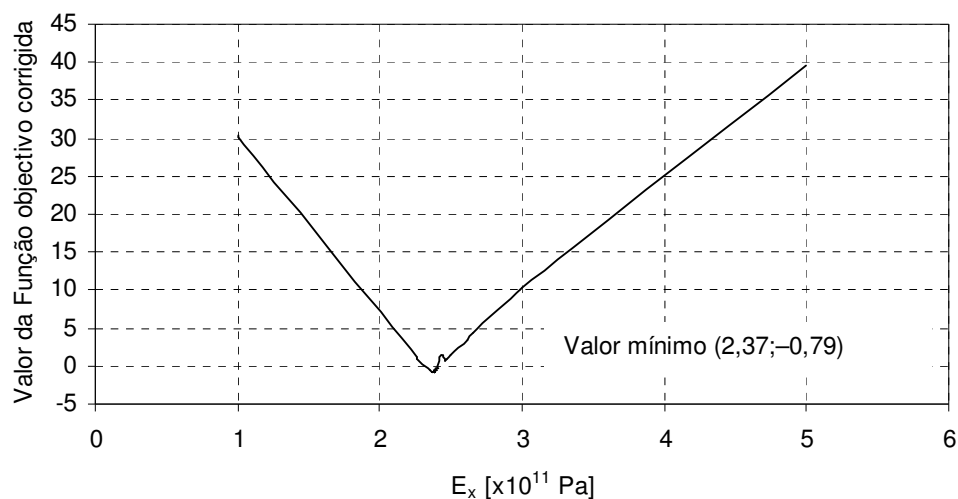


Figura 4.7 Evolução do resultado da função objectivo com a variação de  $E_x$

No caso da variável  $u_{xy}$ , coeficiente de Poisson, o que se verifica é que esta variável não influencia o resultado final, como se pode ver tabela 4.20 e na figura 4.8.

Tabela 4.19 Parâmetros envolvidos admitindo apenas variação de PRDNS

| Parâmetro  | Limite inferior | Valor inicial | Limite superior |
|--|-----------------|---------------|-----------------|
| Módulo de Elasticidade $E_x$ [ $\times 10^{11}$ Pa]  | 2.37            | 2.37          | 2.37            |
| Densidade $\rho$ [ $\times 10^3$ Kg/m <sup>3</sup> ] | 1               | 1             | 9               |
| Coeficiente de Poisson $u_{xy}$                      | 1.00            | 1.00          | 1.00            |
| Espessura $h$ [ $\times 10^{-3}$ m]                  | 1               | 1             | 1               |
| Largura $lg$ [ $\times 10^{-2}$ m]                   | 1               | 1             | 1               |

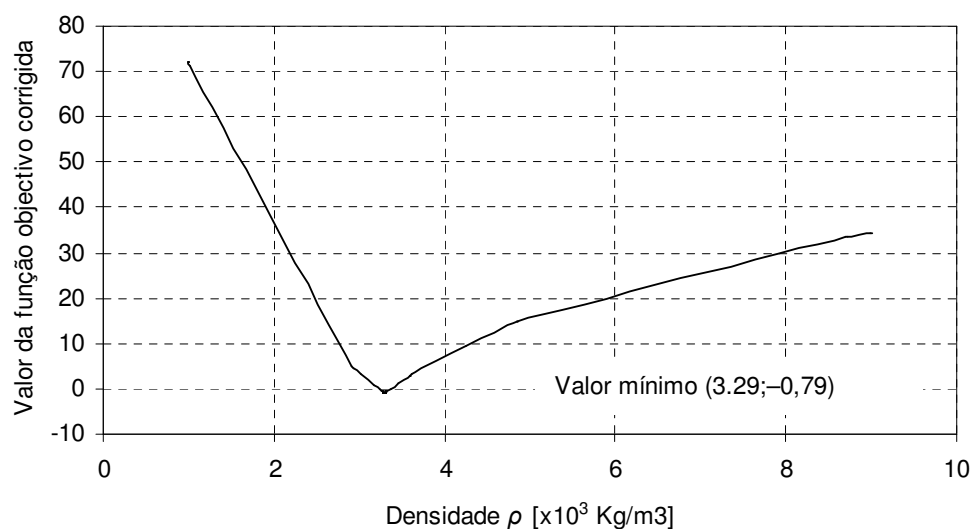


Figura 4.8 Evolução do resultado da função objectivo com a variação de  $\rho$

O efeito da variação no parâmetro  $h$ , espessura, mostra-se nos gráficos das figuras 4.10 e 4.11. Os parâmetros utilizados apresentam-se na tabela 4.21. Nota-se uma forte influência desta variável no valor obtido na função objectivo.

Tabela 4.20 Parâmetros envolvidos admitindo apenas variação de  $u_{xy}$

| Parâmetro  | Limite inferior | Valor inicial | Limite superior |
|--|-----------------|---------------|-----------------|
| Módulo de Elasticidade $E_x$ [ $\times 10^{11}$ Pa]  | 2.37            | 2.37          | 2.37            |
| Densidade $\rho$ [ $\times 10^3$ Kg/m <sup>3</sup> ] | 3.29            | 3.29          | 3.29            |
| Coeficiente de Poisson $u_{xy}$                      | 0.9             | 1.00          | 1.1             |
| Espessura $h$ [ $\times 10^{-3}$ m]                  | 1               | 1             | 1               |
| Largura $lg$ [ $\times 10^{-2}$ m]                   | 1               | 1             | 1               |

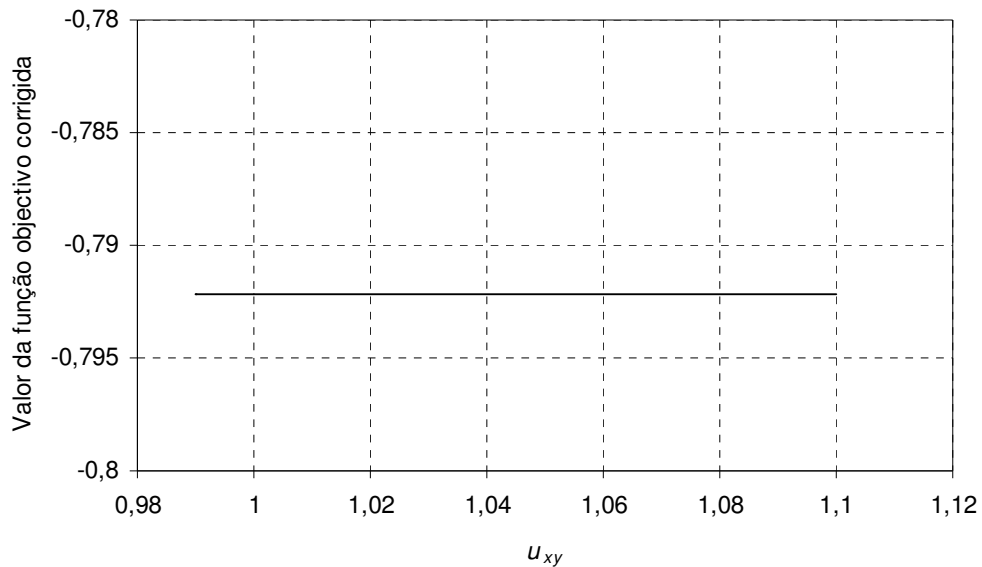


Figura 4.9 Evolução do resultado da função objectivo com a variação de  $u_{xy}$

Tabela 4.21 Parâmetros envolvidos admitindo apenas variação de  $h$

| Parâmetro  | Limite inferior | Valor inicial | Limite superior |
|--|-----------------|---------------|-----------------|
| Módulo de Elasticidade $E_x$ [ $\times 10^{11}$ Pa]  | 2.37            | 2.37          | 2.37            |
| Densidade $\rho$ [ $\times 10^3$ Kg/m <sup>3</sup> ] | 3.29            | 3.29          | 3.29            |
| Coeficiente de Poisson $u_{xy}$                      | 1.00            | 1.00          | 1.00            |
| Espessura $h$ [ $\times 10^{-3}$ m]                  | 0.9             | 1             | 6               |
| Largura $lg$ [ $\times 10^{-2}$ m]                   | 1               | 1             | 1               |

Na figura 4.12 e na tabela 4.22 apresenta-se a evolução da variável largura,  $lg$ . Pode observar-se uma influência também assinalável mas não tão elevada como a da espessura,  $h$ .

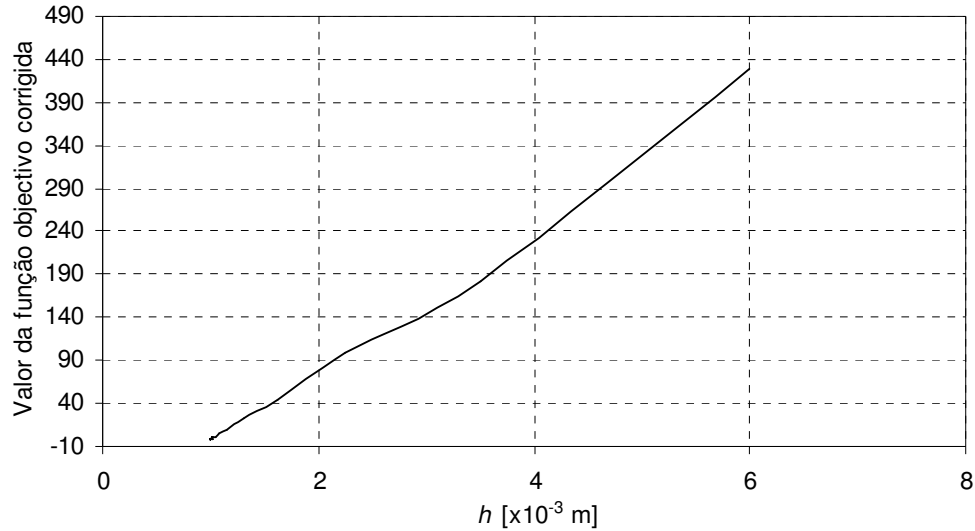


Figura 4.10 Evolução do valor da função objetivo com a variação de  $h$

Na figura 4.13 mostra-se uma ampliação da variação da largura, próxima do ponto óptimo, para melhor observação da influência da variável largura no resultado. Pode observar-se que o ponto óptimo ocorre num valor de  $lg$  unitário, como já era esperado.

Tabela 4.22 Parâmetros envolvidos admitindo apenas variação de  $lg$

| Parâmetro  | Limite inferior | Valor inicial | Limite superior |
|--|-----------------|---------------|-----------------|
| Módulo de Elasticidade $E_x$ [ $\times 10^{11}$ Pa]  | 2.37            | 2.37          | 2.37            |
| Densidade $\rho$ [ $\times 10^3$ Kg/m <sup>3</sup> ] | 3.29            | 3.29          | 3.29            |
| Coefficiente de Poisson $\nu_{xy}$                   | 1.00            | 1.00          | 1.00            |
| Espessura $h$ [ $\times 10^{-3}$ m]                  | 1               | 1             | 1               |
| Largura $lg$ [ $\times 10^{-2}$ m]                   | 0.9             | 1             | 6               |

Comparando estes resultados por sobreposição dos gráficos obtidos com a evolução das variáveis, nas figuras 4.14 e 4.15 pode observar-se a influência de cada variável em relação às restantes. Para mais fácil comparação procedeu-se previamente à adimensionalização das variáveis que não convergiam para um valor unitário, caso das  $E_x$  e  $\rho$ .

Pode concluir-se, pela análise da parte direita da curva relativamente ao ponto óptimo, que o parâmetro  $h$  é o que mais contribui para alcançar a solução óptima, seguindo-se o  $E_x$  e o  $\rho$ , muito próximos. O parâmetro que menos influência o processo de melhoramento é o  $lg$ . Do lado esquerdo da curva, parece haver uma inversão de tendência entre os parâmetros  $E_x$  e o  $\rho$ .

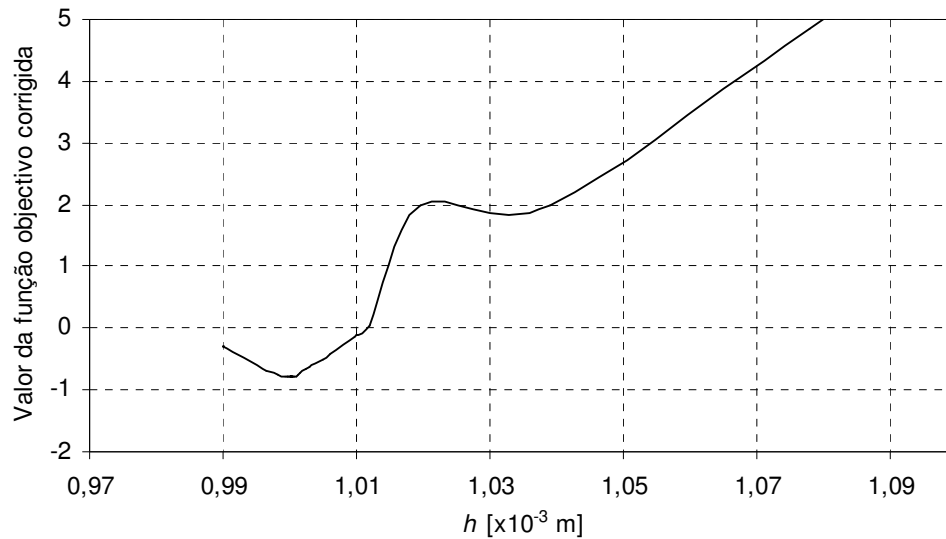


Figura 4.11 Ampliação da evolução da função objetivo na zona do ponto óptimo na análise da variável  $h$

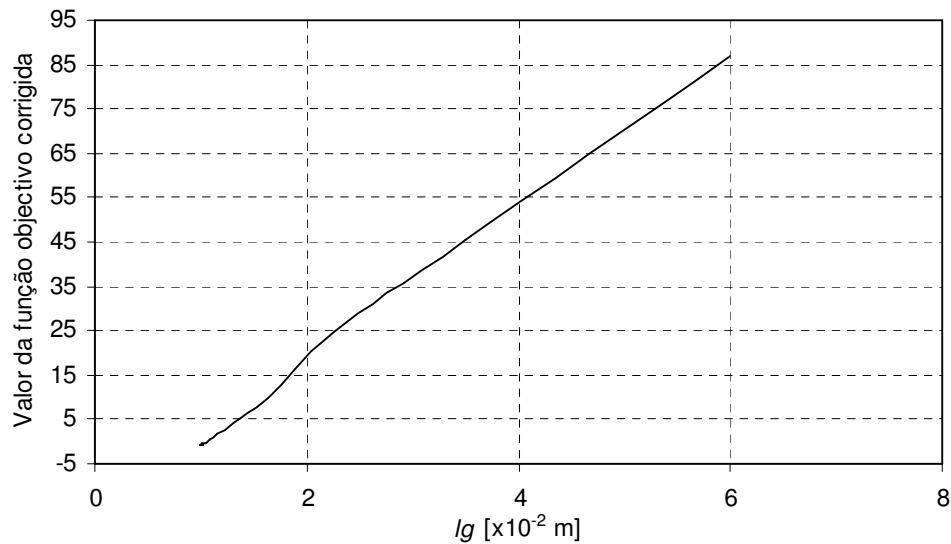


Figura 4.12 Evolução do resultado da função objetivo com a variação de  $lg$



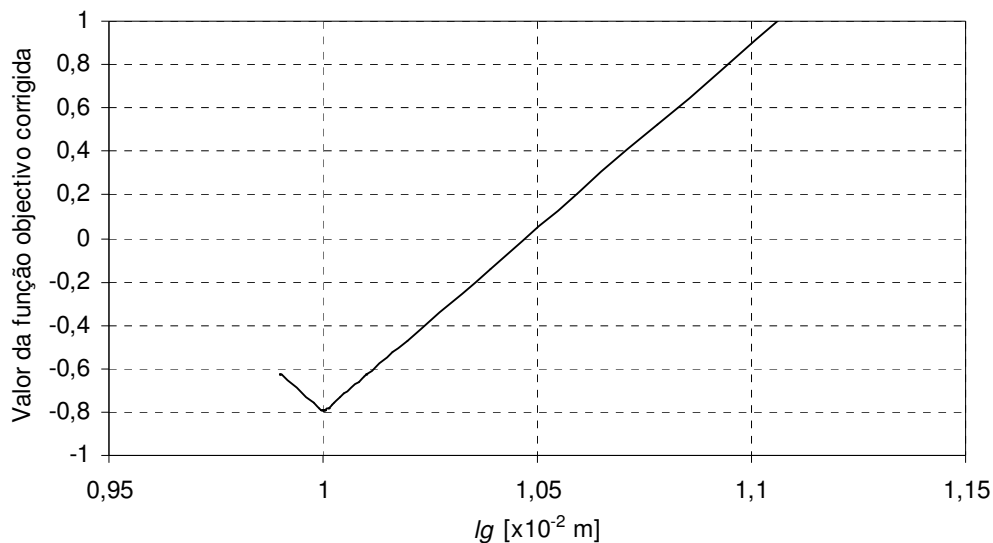


Figura 4.13 Ampliação da evolução da função objetivo na zona do ponto óptimo

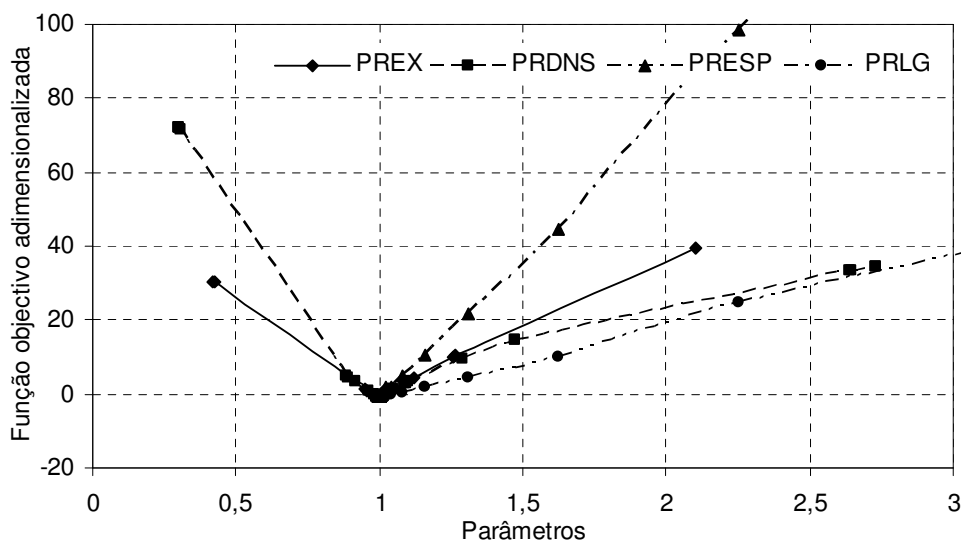


Figura 4.14 Evolução da função objetivo como função dos parâmetros durante a otimização

Averigua-se agora o comportamento do melhoramento do modelo a partir de outros valores iniciais. Atribuem-se diversos valores iniciais, de uma forma aleatória, mas dentro do intervalo entre os limites do exemplo descrito e os valores utilizados no modelo de referência. Na tabela 4.23 apresentam-se os resultados obtidos.

Tabela 4.23 Função objectivo para várias análises com pontos de partida diferentes

| Ensaio             | Variável | Limite inferior | Ponto de partida | Limite superior | Solução óptima   | Função Objectivo corrigida |
|--------------------|----------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|----------------------------|
| Modelo inicial (0) | $E_x$    | 1               | 1                | 5               | 2.37513969845481 | -0.79219                   |
|                    | $\rho$   | 1               | 1                | 9               | 3.29267101697022 |                            |
|                    | $u_{xy}$ | 1               | 1                | 5               | 1.00000000004832 |                            |
|                    | $h$      | 1               | 1                | 5               | 1.00000000000000 |                            |
|                    | $lg$     | 1               | 1                | 5               | 1.00000000000000 |                            |
| Análise nº 1       | $E_x$    | 1               | 1                | 3               | 1.03865984027031 | -0.24417                   |
|                    | $\rho$   | 3               | 3                | 9               | 3.00000000000000 |                            |
|                    | $u_{xy}$ | 2               | 2                | 6               | 1.99999997243578 |                            |
|                    | $h$      | 1               | 1                | 3               | 1.43994066357387 |                            |
|                    | $lg$     | 1               | 1                | 3               | 1.48713112570948 |                            |
| Análise nº 2       | $E_x$    | 1               | 1                | 3               | 1.58595864563960 | -0.78115                   |
|                    | $\rho$   | 4               | 4                | 8.4             | 4.00000000000000 |                            |
|                    | $u_{xy}$ | 2               | 2                | 6               | 2.00000005802612 |                            |
|                    | $h$      | 1               | 1                | 3               | 1.34731182159510 |                            |
|                    | $lg$     | 1               | 1                | 3               | 1.34943000541199 |                            |
| Análise nº 3       | $E_x$    | 1               | 1                | 3               | 1.03865984027031 | -0.65855                   |
|                    | $\rho$   | 6               | 6                | 8.4             | 3.00000000000000 |                            |
|                    | $u_{xy}$ | 2               | 2                | 6               | 1.99999997243578 |                            |
|                    | $h$      | 1               | 1                | 3               | 1.43994066357387 |                            |
|                    | $lg$     | 1               | 1                | 3               | 1.48713112570948 |                            |
| Análise nº 4       | $E_x$    | 1               | 1                | 3               | 1.56778055721432 | -0.8014                    |
|                    | $\rho$   | 7               | 7                | 8.4             | 7.95510418047643 |                            |
|                    | $u_{xy}$ | 2               | 2                | 6               | 2.00000000101719 |                            |
|                    | $h$      | 1               | 1                | 3               | 1.91306508735872 |                            |
|                    | $lg$     | 1               | 1                | 3               | 1.91530177369399 |                            |
| Análise nº 5 (ref) | $E_x$    | 1.521           | 1.69             | 1.859           | 1.69             | -0.78805                   |
|                    | $\rho$   | 6.9705          | 7.745            | 8.5195          | 7.745            |                            |
|                    | $u_{xy}$ | 2.961           | 3.29             | 3.619           | 3.29             |                            |
|                    | $h$      | 1.638           | 1.82             | 2.002           | 1.82             |                            |
|                    | $lg$     | 1.638           | 1.82             | 2.002           | 1.82             |                            |

Apesar de se procurar utilizar um critério de evolução dos pontos de partida com valores mais elevados nas variáveis de maior dimensão do modelo de referência, a função objectivo apresenta resultados por vezes piores aparentemente sem explicação. No entanto, observando na mesma tabela, por exemplo a primeira e segunda análises, os valores finais das variáveis no final da optimização, pode-se notar que o parâmetro  $\rho$  regressa ao valor inicial pelo que, provavelmente, a sua tendência é no sentido de diminuir ainda mais, caminhando para outra solução ainda melhor. Mas como o objectivo é ajuizar o efeito do ponto de partida, continua-se a incrementar os valores atribuídos inicialmente, obtendo-se o melhor resultado para a quarta análise, como se pode observar na figura 4.16. No entanto

todos os valores iniciais conduzem a bons resultados da função objectivo, o que significa que existem muitos pontos óptimos.

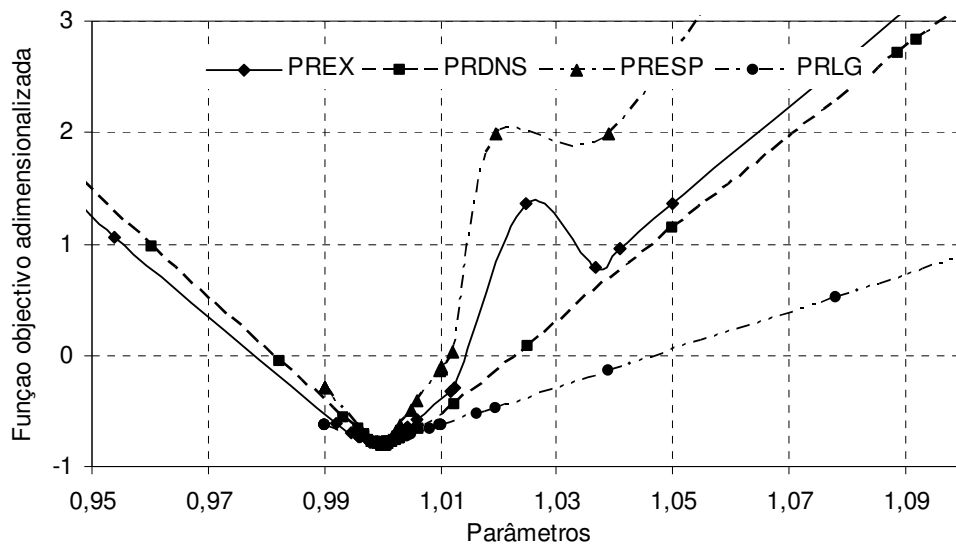


Figura 4.15 Ampliação da zona do ponto óptimo

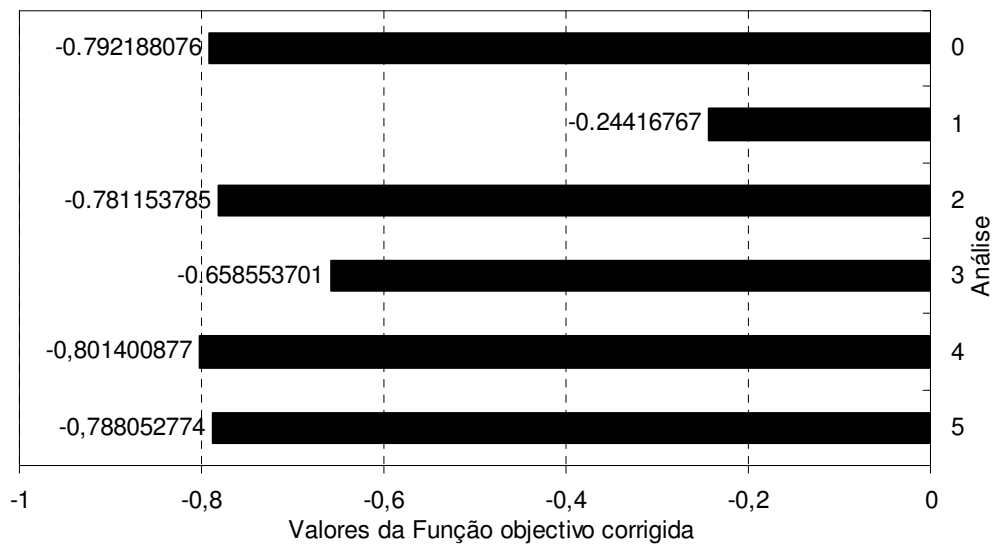


Figura 4.16 Comparação entre os valores obtidos pela função objectivo, conforme o ponto de partida das variáveis

Pode-se concluir que a obtenção da solução óptima é praticamente independente da escolha dos pontos de partida. Porém é necessário fazer uma escolha criteriosa dos limites superior e inferior a atribuir ao campo de variação de cada variável para que o optimizador se aproxime da solução do melhor mínimo. Campos de variação demasiadamente largos

conduzem o otimizador a soluções irrealistas. Portanto é possível que se atinjam soluções que não representem a melhor solução ótima, porque as funções representativas da evolução das variáveis podem apresentar outros pontos mínimos. O processo termina no momento em que se obtenha o melhor valor mínimo da função objectivo.

### 4.3 Análise da Placa Quadrada

Continuando a análise do método de melhoramento de modelos de elementos finitos, analisa-se agora uma placa quadrada livre. Mantêm-se as propriedades do material utilizadas na viga e do ponto de vista geométrico opta-se por manter a escolha de uma pequena espessura. Na figura 4.21 mostram-se resumidamente as principais dimensões e propriedades utilizadas para o modelo de referência agora em estudo.

Pela análise de vibrações de uma placa quadrada simples, livre no espaço, através das aplicações do método de Ritz (Timoshenko, 1974: 496), obtêm-se as suas frequências naturais através de:

$$f_n = \frac{\alpha}{2\pi} \sqrt{\frac{E \cdot e^2}{\rho \cdot a^4 (1 - \nu^2)}} \quad (4.2)$$

com  $\alpha$  obtido através da tabela 4.24:

Tabela 4.24 Valores de  $\alpha$  para a placa quadrada livre

| Modo     | 1º   | 2º   | 3º   | 4º    | 5º    | 6º    |
|----------|------|------|------|-------|-------|-------|
| $\alpha$ | 4.07 | 5.91 | 6.91 | 10.39 | 17.80 | 18.85 |

As primeiras 8 frequências naturais e respectivos modos de vibração apresentam-se na tabela 4.25. Constrói-se então um modelo de referência modelado em ANSYS utilizando elementos de casca (tipo SHELL63) com 225 elementos, um número relativamente elevado, com o qual se obtêm frequências naturais que são muito próximas das obtidas analiticamente, como se vê na mesma tabela.

Pode-se utilizar este modelo numérico, assim definido, como sendo o modelo de referência, pois representa, com boa aproximação, as propriedades dinâmicas da placa calculadas analiticamente. Nestas condições, determinam-se os modos de vibração e as

frequências naturais até 1000 Hz. Obtêm-se 23 frequências naturais e os modos de vibração em 16 pontos obtidos pela divisão da placa em nove quadrados iguais, estando cada ponto localizado em cada vértice dos quadrados, como se mostra na figura 4.17.

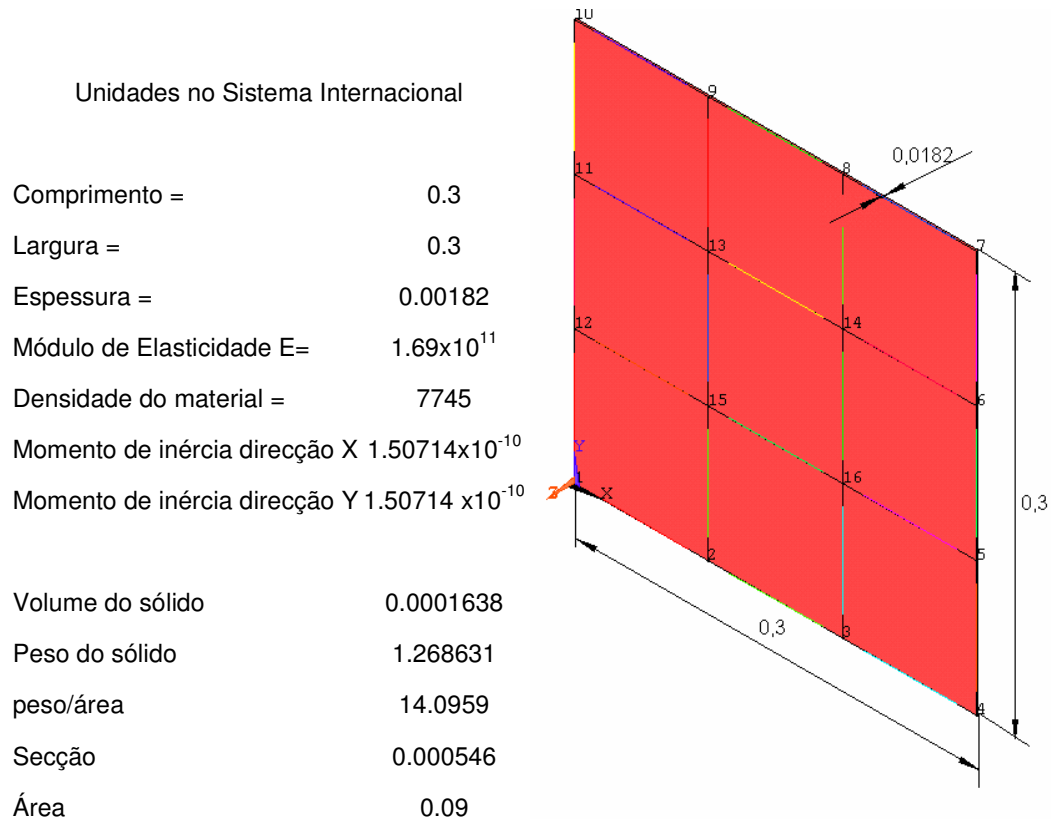


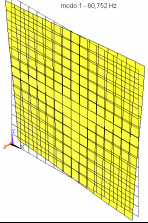
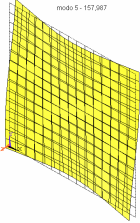
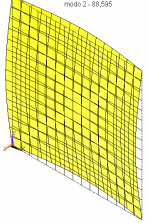
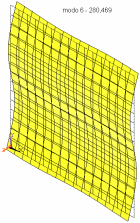
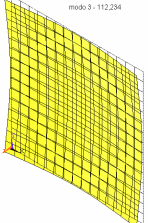
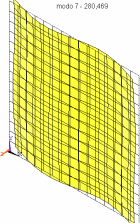
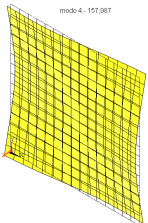
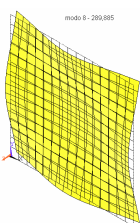
Figura 4.17 Placa quadrada livre, dimensões e propriedades

Na tabela 4.26 apresentam-se os resultados obtidos. Para todos os pontos obtêm-se o deslocamento na mesma direcção, perpendicularmente à superfície da placa e a sequência da apresentação dos valores tal como é mostrada na tabela 4.26, segue a seguinte ordem: Pontos 1, 2, 3, 4, 12, 15, 16, 5, 11, 13, 14, 6, 10, 9, 8 e 7. As frequências naturais aparecem por ordem crescente e a cada linha corresponde um modo de vibração respectivo, medido em cada um dos pontos citados.

Conhecidas as características dinâmicas do modelo de referência, o modelo numérico é definido de forma idêntica à utilizada na modelação da viga, no exemplo anterior, utilizando agora vigas colocadas nas arestas dos 9 quadrados em que se dividiu o modelo de referência. Cria-se, assim, um modelo de vigas que tem características dinâmicas diferentes das do modelo de referência, mas que são alteradas por melhoramento das suas

propriedades dinâmicas, para se obter características mais semelhantes às do modelo de referência.

Tabela 4.25 Frequências naturais e modos de vibração da placa quadrada

| Modo N.º | Frequência |          | Forma   | Modo N.º | Frequência |          | Forma   |
|----------|------------|----------|---|----------|------------|----------|---|
|          | Analítica  | Numérica |   |          | Analítica  | Numérica |   |
| 1        | 64.797     | 60.752   |    | 5        | 165.414    | 157.987  |    |
| 2        | 94.568     | 88.595   |    | 6        | 283.3857   | 280.469  |    |
| 3        | 110.011    | 112.234  |   | 7        | 283.3857   | 280.469  |   |
| 4        | 165.414    | 157.987  |  | 8        | 300.1023   | 289.8554 |  |

O modelo numérico assim definido possui 24 vigas interligadas rigidamente, como se pode ver na figura 4.18. Cada viga pode ter largura e espessura diferentes mas comprimento constante. Associa-se a cada viga um material diferente dando origem a um grande conjunto de variáveis a otimizar pelo método de melhoramento. Como primeira abordagem escolhem-se 5 variáveis que se apresentam na tabela 4.27 e mantêm-se as condições de otimização já utilizadas nos modelos anteriores, mostradas na tabela 4.6. As variáveis são uma vez mais adimensionalizadas e inicia-se o melhoramento pelo limite inferior.

Na tabela 4.27 apresentam-se também os valores obtidos pela função objectivo em três análises. Pode-se observar que o seu valor é muito elevado, provocado pelo efeito da parcela correspondente à correlação entre as frequências, dado que o seu ajustamento em relação às frequências do modelo de referência é muito fraco. Na mesma tabela apresentam-se as frequências naturais do modelo de referência e as obtidas no início do melhoramento em cada análise quando se parte do valor inicial e também após a obtenção da solução óptima.

Tabela 4.26 Primeiras 23 frequências naturais e modos de vibração do modelo de referência

| $\omega_{0a23}$ | Deslocamento nos 16 pontos de leitura (modos de vibração) |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 60.8            | 2.41  | 0.92  | -0.92 | -2.41 | 0.92  | 0.33  | -0.33 | -0.92 | -0.92 | -0.33 | 0.33  | 0.92  | -2.41 | -0.92 | 0.92  | 2.41  |
| 88.6            | 0.00  | 1.77  | 1.77  | 0.00  | -1.77 | 0.00  | 0.00  | -1.77 | -1.77 | 0.00  | 0.00  | -1.77 | 0.00  | 1.77  | 1.77  | 0.00  |
| 112.2           | -2.56   | -0.71 | -0.71 | -2.56 | -0.71 | 0.91  | 0.91  | -0.71 | -0.71 | 0.91  | 0.91  | -0.71 | -2.56 | -0.71 | -0.71 | -2.56 |
| 158.0           | -3.05   | -0.88 | 1.53  | 1.75  | 0.88  | 0.40  | -0.23 | -1.53 | 1.53  | 0.23  | -0.40 | -0.88 | -1.75 | -1.53 | 0.88  | 3.05  |
| 158.0           | -1.75   | 1.53  | 0.88  | -3.05 | -1.53 | 0.23  | 0.40  | -0.88 | 0.88  | -0.40 | -0.23 | 1.53  | 3.05  | -0.88 | -1.53 | 1.75  |
| 280.5           | -1.60   | -1.83 | -1.36 | -2.35 | 1.53  | 0.92  | 1.35  | 0.92  | -0.92 | -1.35 | -0.92 | -1.53 | 2.35  | 1.36  | 1.83  | 1.60  |
| 280.5           | 2.35  | -0.92 | 1.53  | -1.60 | 1.36  | -1.35 | 0.92  | -1.83 | 1.83  | -0.92 | 1.35  | -1.36 | 1.60  | -1.53 | 0.92  | -2.35 |
| 289.9           | 2.68  | -1.26 | -1.26 | 2.68  | -1.26 | 0.50  | 0.50  | -1.26 | -1.26 | 0.50  | 0.50  | -1.26 | 2.68  | -1.26 | -1.26 | 2.68  |
| 315.2           | 0.00  | -2.16 | 2.16  | 0.00  | 2.16  | 0.00  | 0.00  | -2.16 | -2.16 | 0.00  | 0.00  | 2.16  | 0.00  | 2.16  | -2.16 | 0.00  |
| 354.2           | 3.76  | -0.54 | 0.54  | -3.76 | -0.54 | -1.10 | 1.10  | 0.54  | 0.54  | 1.10  | -1.10 | -0.54 | -3.76 | 0.54  | -0.54 | 3.76  |
| 481.3           | 3.20  | -2.51 | 1.48  | -1.25 | -2.05 | 1.18  | -0.46 | 0.29  | -0.29 | 0.46  | -1.18 | 2.05  | 1.25  | -1.48 | 2.51  | -3.20 |
| 481.3           | -1.25   | 0.29  | 2.05  | -3.20 | 1.48  | -0.46 | -1.18 | 2.51  | -2.51 | 1.18  | 0.46  | -1.48 | 3.20  | -2.05 | -0.29 | 1.25  |
| 536.9           | 0.00  | 1.38  | 1.38  | 0.00  | -1.38 | 0.00  | 0.00  | -1.38 | -1.38 | 0.00  | 0.00  | -1.38 | 0.00  | 1.38  | 1.38  | 0.00  |
| 563.6           | 2.51  | 1.00  | 1.00  | 2.51  | 1.00  | -0.44 | -0.44 | 1.00  | 1.00  | -0.44 | -0.44 | 1.00  | 2.51  | 1.00  | 1.00  | 2.51  |
| 603.2           | 3.57  | -0.44 | -0.84 | 2.03  | 0.55  | -0.23 | -0.13 | 0.91  | -0.91 | 0.13  | 0.23  | -0.55 | -2.03 | 0.84  | 0.44  | -3.57 |
| 603.2           | 2.03  | 0.91  | -0.55 | -3.57 | -0.84 | -0.13 | 0.23  | 0.44  | -0.44 | -0.23 | 0.13  | 0.84  | 3.57  | 0.55  | -0.91 | -2.03 |
| 698.2           | 2.69  | -2.35 | 2.35  | -2.69 | -2.35 | 1.57  | -1.57 | 2.35  | 2.35  | -1.57 | 1.57  | -2.35 | -2.69 | 2.35  | -2.35 | 2.69  |
| 739.2           | 0.00  | 0.61  | 0.61  | 0.00  | -0.61 | 0.00  | 0.00  | -0.61 | -0.61 | 0.00  | 0.00  | -0.61 | 0.00  | 0.61  | 0.61  | 0.00  |
| 770.4           | 3.97  | -1.41 | -1.41 | 3.97  | -1.41 | 0.37  | 0.37  | -1.41 | -1.41 | 0.37  | 0.37  | -1.41 | 3.97  | -1.41 | -1.41 | 3.97  |
| 911.6           | 1.64  | 1.49  | -1.31 | -1.47 | 1.76  | 0.80  | -0.72 | -1.60 | 1.61  | 0.72  | -0.80 | -1.76 | 1.47  | 1.31  | -1.49 | -1.64 |
| 911.6           | -1.47   | -1.60 | -1.76 | -1.64 | -1.31 | -0.72 | -0.80 | -1.49 | 1.49  | 0.80  | 0.72  | 1.31  | 1.64  | 1.76  | 1.61  | 1.47  |
| 937.5           | 0.00  | -0.32 | 0.32  | 0.00  | 0.32  | 0.00  | 0.00  | -0.32 | -0.32 | 0.00  | 0.00  | 0.32  | 0.00  | 0.32  | -0.32 | 0.00  |
| 984.5           | -3.70   | 2.36  | -1.96 | 1.35  | 1.43  | -1.04 | 0.38  | 0.57  | -0.57 | -0.38 | 1.04  | -1.43 | -1.35 | 1.96  | -2.36 | 3.70  |

Examinando os resultados obtidos para as frequências naturais dos modelos de elementos finitos verifica-se, em primeiro lugar, que não seguem a ordem crescente como já foi referido aquando da análise dos resultados obtidos no ensaio da viga livre. Efectivamente o programa de melhoramento faz esta alteração, através da utilização do *ASMAC*. Esta função analisa o número *MAC*, logo a partir da primeira iteração executada, em cada ponto da diagonal principal da matriz obtida e reorienta o par modo de vibração

frequência natural, em função do grau de aproximação à unidade que esse número apresenta, por pesquisa nos seus pares mais próximos. Neste exemplo, da placa quadrada, o efeito da função *ASMAC* está mais evidenciado, uma vez que logo na primeira frequência natural se verifica o desacerto entre os modelos numérico e o de referência. Analisando os resultados obtidos, verifica-se que em nenhuma das análises apresentadas na tabela 4.27 consegue conduzir a uma boa correlação entre as frequências naturais. A função de melhoramento para permitir uma melhor correlação nos modos de vibração escolhe pares de modos e frequências que se desviam consideravelmente dos emparelhamentos iniciais.

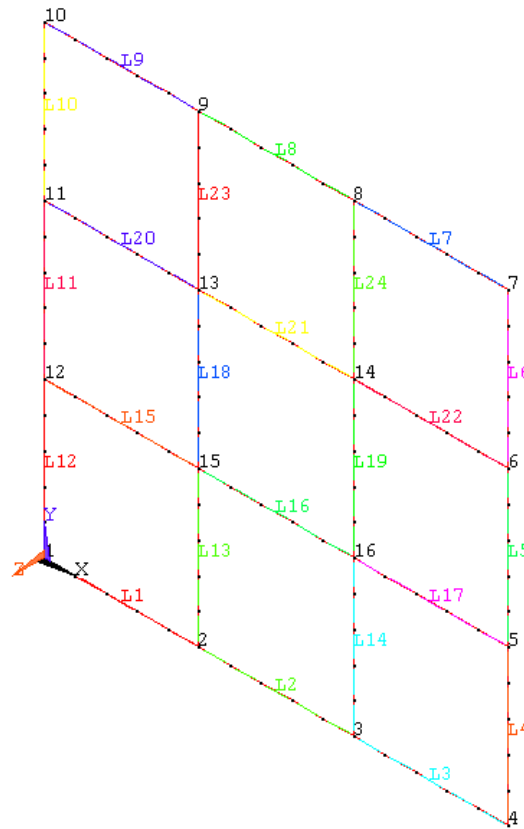


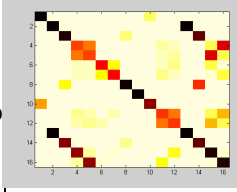
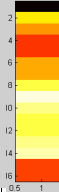
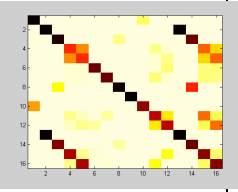

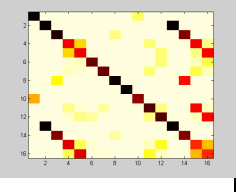

Figura 4.18 Representação do modelo numérico utilizando elementos de viga

Neste tipo de análise redistribuem-se as linhas da matriz *MAC* e as respectivas frequências, de forma a ser obtida a melhor diagonal principal, obtendo-se assim a melhor correlação entre os modos de vibração, em cada iteração, não sendo necessariamente a melhor correlação entre as frequências. Isto acontece porque o modelo numérico não gera modos de vibração suficientemente parecidos com os de referência. Desta forma o progresso de otimização faz-se fundamentalmente na melhoria da correlação entre



frequências, objectivo não atingido. Os valores obtidos pela função objectivo entre 13 e 34 são muito elevados para serem aceites como conferindo uma boa representatividade do modelo numérico. Este objectivo só é conseguido quando o valor da função objectivo for próxima da unidade e será tanto melhor quanto menor o valor da função objectivo, até ao limite de -1, valor correspondente à correlação perfeita entre os dois modelos.

Tabela 4.27 Comparação entre resultados obtidos nas três primeiras análises de melhoramento da placa quadrada utilizando elementos de viga

| Parâmetros variáveis                   | Variáveis no ensaio 1  |                  |  | Variáveis no ensaio 2  |                  |   | Variáveis no ensaio 3  |                  |  |
|--|--|------------------|--|--|------------------|---|--|------------------|--|
|  | Limite inferior  | Valor inicial    | Limite superior  | Limite inferior  | Valor inicial    | Limite superior   | Limite inferior  | Valor inicial    | Limite superior  |
| $E_x$                                  | 0.9  | 1                | 3  | 0.9  | 1                | 3   | 0.845  | 1.69             | 2.535  |
| $\rho$                                 | 0.9  | 1                | 8  | 2.7  | 3                | 9   | 3.873  | 7.745            | 11.618   |
| $u_{xy}$                               | 0.9  | 1                | 5  | 1.8  | 2                | 4   | 1.645  | 3.29             | 4.935  |
| $h$                                    | 0.9  | 1                | 2  | 0.9  | 1                | 2   | 0.91   | 1.82             | 2.73   |
| $lg$                                   | 0.9  | 1                | 4  | 1.8  | 2                | 5   | 1.875  | 3.75             | 5.625  |
| Valor Objectivo                        | <b>13.08912887</b>   |                  |  | <b>34.27488672</b>   |                  |   | <b>21.44515284</b>   |                  |  |
| Correlação conseguida após optimização | MAC (modos)  |                  | $\omega$   | MAC (modos)  |                  | $\omega$  | MAC (modos)  |                  | $\omega$   |
|  |  |                  |  |  |                  |  |  |                  |  |
|  |  |                  |  |  |                  |   |  |                  |  |
|  |  |                  |  |  |                  |   |  |                  |  |
| $\omega_{ref}$                         | $\omega_{inicial}$   | $\omega_{final}$ |  | $\omega_{inicial}$   | $\omega_{final}$ |   | $\omega_{inicial}$   | $\omega_{final}$ |  |
| 60.752                                 | 143.554  | 145.319          |  | 92.746   | 99.570           |   | 136.278  | 140.950          |  |
| 88.595                                 | 62.474   | 65.669           |  | 35.977   | 39.968           |   | 52.522   | 54.639           |  |
| 112.234                                | 66.593   | 69.995           |  | 38.346   | 42.601           |   | 55.926   | 58.182           |  |
| 157.987                                | 233.752  | 240.391          |  | 143.629  | 156.596          |   | 211.230  | 219.016          |  |
| 157.987                                | 233.752  | 240.391          |  | 143.629  | 156.596          |   | 211.230  | 219.016          |  |
| 280.469                                | 173.853  | 182.725          |  | 99.949   | 111.084          |   | 144.746  | 150.640          |  |
| 280.469                                | 173.853  | 182.725          |  | 99.949   | 111.084          |   | 144.746  | 150.640          |  |
| 289.855                                | 320.890  | 334.127          |  | 189.835  | 209.331          |   | 278.956  | 289.788          |  |
| 315.243                                | 303.360  | 315.865          |  | 179.663  | 198.031          |   | 264.426  | 274.650          |  |
| 354.213                                | 305.906  | 319.196          |  | 180.098  | 198.848          |   | 265.096  | 275.419          |  |
| 481.339                                | 387.918  | 405.843          |  | 226.643  | 250.773          |   | 332.822  | 345.940          |  |
| 481.339                                | 387.918  | 405.843          |  | 226.643  | 250.773          |   | 332.822  | 345.940          |  |
| 536.873                                | 459.990  | 484.259          |  | 258.614  | 289.047          |   | 349.952  | 365.409          |  |
| 563.579                                | 505.544  | 532.119          |  | 283.688  | 317.218          |   | 379.548  | 396.529          |  |
| 603.196                                | 890.410  | 908.419          |  | 566.769  | 610.339          |   | 831.982  | 860.749          |  |
| 603.196                                | 890.410  | 908.419          |  | 566.769  | 610.339          |   | 831.982  | 860.749          |  |

Ensaia-se então outras alternativas envolvendo um maior número de variáveis para tentar encontrar um modelo que se ajuste melhor ao modelo de referência. Na tabela 4.28

apresentam-se as análises mais representativas realizadas, todos utilizando com ponto de partida o valor unitário em cada variável, uma vez que nos ensaios anteriores esta condição conduziu a uma melhor solução.

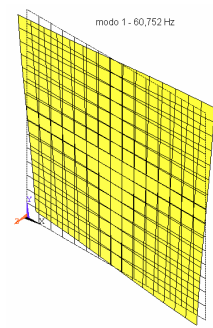
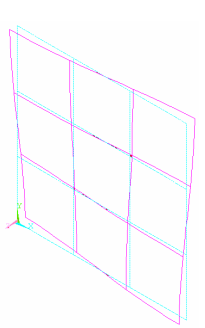
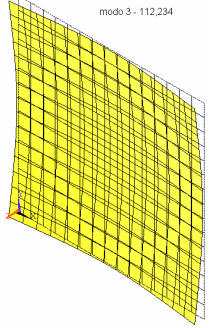
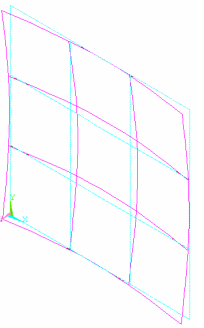
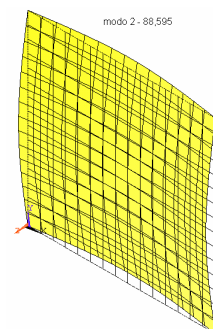
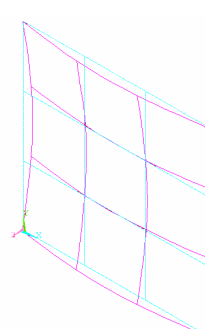
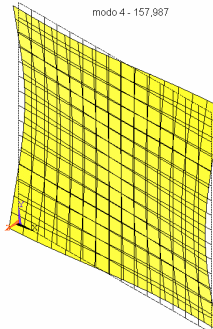
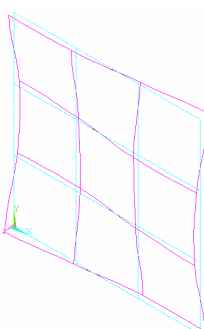
Tabela 4.28 Resultados obtidos em ensaios com quantidades diversas de variáveis

| Ensaio 4               |                      | Ensaio 5               |                      | Ensaio 6               |                      | Ensaio 7               |                      |
|------------------------|----------------------|------------------------|----------------------|------------------------|----------------------|------------------------|----------------------|
| 28 Variáveis           | Viga L n.º associada | 19 Variáveis           | Viga L n.º associada | 12 Variáveis           | Viga L n.º associada | 12 Variáveis           | Viga L n.º associada |
| $E_x$                  | Todas                | $E_x$                  | Todas                | $E_x$                  | Todas                | $E_x$                  | Todas                |
| $\rho$                 | Todas                | $\rho$                 | Todas                | $\rho$                 | Todas                | $\rho$                 | Todas                |
| $u_{xy}$               | Todas                | $u_{xy}$               | Todas                | $u_{xy}$               | Todas                | $u_{xy}$               | Todas                |
| $h$                    | Todas                | $h_1$                  | 2;5;8;12             | $h_1$                  | 2;5;8;12             | $h$                    | Todas                |
| $lg_1$                 | 1                    | $h_2$                  | 1;3;4;6;7;8;10;12    | $h_2$                  | 1;3;4;6;7;8;10;12    |                        |                      |
| $lg_2$                 | 2                    | $h_3$                  | 14;15;22;23          | $h_3$                  | 14;15;22;23          |                        |                      |
| ....                   | ....                 | $h_4$                  | 13;17;20;24          | $h_4$                  | 13;17;20;24          |                        |                      |
| ....                   | ....                 | $h_5$                  | 21                   | $h_5$                  | 21                   |                        |                      |
| $lg_{23}$              | 23                   | $h_6$                  | 19                   | $h_6$                  | 19                   |                        |                      |
| $lg_{24}$              | 24                   | $h_7$                  | 16                   | $h_7$                  | 16                   |                        |                      |
|                        |                      | $h_8$                  | 18                   | $h_8$                  | 18                   |                        |                      |
|                        |                      | $lg_1$                 | 2;5;8;12             | $lg$                   | Todas                | $lg_1$                 | 2;5;8;12             |
|                        |                      | $lg_2$                 | 1;3;4;6;7;8;10;12    |                        |                      | $lg_2$                 | 1;3;4;6;7;8;10;12    |
|                        |                      | $lg_3$                 | 14;15;22;23          |                        |                      | $lg_3$                 | 14;15;22;23          |
|                        |                      | $lg_4$                 | 13;17;20;24          |                        |                      | $lg_4$                 | 13;17;20;24          |
|                        |                      | $lg_5$                 | 21                   |                        |                      | $lg_5$                 | 21                   |
|                        |                      | $lg_6$                 | 19                   |                        |                      | $lg_6$                 | 19                   |
|                        |                      | $lg_7$                 | 16                   |                        |                      | $lg_7$                 | 16                   |
|                        |                      | $lg_8$                 | 18                   |                        |                      | $lg_8$                 | 18                   |
| Valor objectivo obtido | <b>9.794426</b>      | Valor objectivo obtido | <b>6.72058619</b>    | Valor objectivo obtido | <b>9.7230103</b>     | Valor objectivo obtido | <b>6.9009722</b>     |

Na quarta análise, representada na tabela 4.28, além das variáveis já utilizadas nas análises anteriores, usa-se um novo tipo de variável, a largura de cada uma das 24 vigas do modelo numérico, num total de 28 variáveis. O valor da função objectivo melhora para 9.79, melhor que nos ensaios anteriores, mas mesmo assim ainda inaceitável. De forma a reduzir o número de parâmetros utilizado na optimização tira-se partido da simetria do modelo, optando-se por considerar a mesma variável para um conjunto de vigas posicionadas de uma forma simétrica na construção do modelo. Assim na tabela 4.28 mostram-se, para cada análise, as variáveis consideradas e qual o número correspondente das vigas que se associam a cada variável, de acordo com o modelo de elementos finitos

mostrado na figura 4.18. Na quinta análise consideraram-se 8 variáveis associadas à espessura e outras 8 à largura das vigas do modelo, num total de 19 variáveis. O modelo assim construído possibilita variar dois parâmetros por viga e permite uma melhor capacidade de escolha pelo otimizador do programa. O valor da função objectivo melhorou para 6.72, no entanto, ainda longe do aceitável. Existe ainda uma divergência muito grande entre as frequências naturais, embora os modos de vibração apresentem uma boa correlação, como se pode ver nas figuras mostradas da tabela 4.29. As duas últimas análises, mostradas na tabela 4.28, mostram o efeito no valor da função objectivo utilizando, na sexta análise variáveis associadas à espessura de cada viga e na sétima análise associadas à largura. O efeito de variação das larguras conduziu a melhores resultados, apesar da convergência ser mais rápida com a variação da espessura, como se mostra na figura 4.19, mantendo a tendência verificada nos ensaios da viga de secção rectangular, figura 4.14.

Tabela 4.29 Comparação entre as primeiras 4 Frequências naturais e modos forma da placa quadrada obtidas com o modelo numérico do ensaio n.º 5

| Modo N.º | Modelo de referência<br>Modo de vibração  | Modelo numérico<br>Modo de vibração   | Modo N.º | Modelo de referência<br>Modo de vibração   | Modelo numérico<br>Modo de vibração   |
|----------|---|---|----------|--|---|
| 1        | $\omega=60.75$  | $\omega=103.37$   | 3        | $\omega=112.23$  | $\omega=83.15$  |
|          |  |  |          |  |  |
| 2        | $\omega=88.59$  | $\omega=62.67$  | 4        | $\omega=157.99$  | $\omega=181.99$   |
|          |  |  |          |  |  |

Resumindo pode-se concluir que, com o aumento das variáveis envolvidas no processo de melhoramento, os resultados da função objectivo melhoram, mas continuam a ser muito elevados traduzindo portanto uma fraca correlação entre o modelo de elementos finitos e o de referência. Uma justificação possível para este facto pode advir da utilização do elemento de viga (BEAM4) na modelação de modelo numérico, que é diferente do utilizado no modelo de referência, elemento de casca (SHELL63), não sendo possível ajustar eficientemente os parâmetros variáveis que estão associados a modelos que usam as funções de forma diferentes. O modelo de viga gera modos de vibração do tipo mostrado na tabela 4.1 dando origem a muitos modos que não podem ser utilizados directamente na modelação do modelo da placa rectangular e que são suprimidos automaticamente pelo programa de melhoramento.

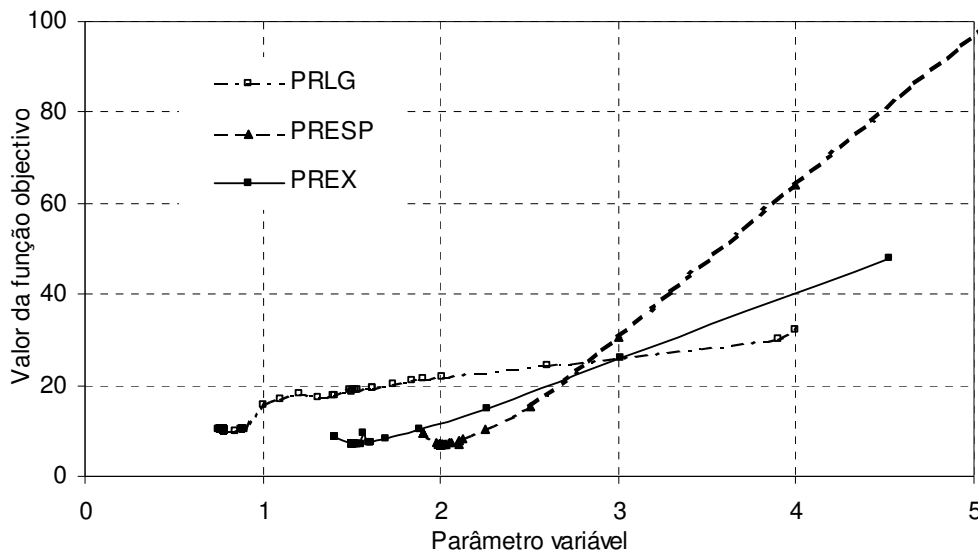


Figura 4.19 Comparação dos parâmetros durante a optimização. Resultados obtidos através dos ensaios 6 e 7

Para comprovar esta conclusão, concebe-se outro modelo numérico de geometria semelhante ao anterior, mas materializando as vigas por superfícies e utilizando elementos de casca (SHELL63). Na figura 4.20 mostra-se um aspecto do novo modelo designado agora de lâminas. Este tipo de elemento (SHELL63) apenas aceita variar a propriedade geométrica espessura, pelo que se criam um conjunto de 40 áreas rectangulares de geometria variável. Para fazer variar a largura de cada área, estas são formadas a partir de linhas que, por sua vez, são criadas a partir de pontos com coordenadas variáveis. Alguns dos pontos, vértices interiores dos vários rectângulos, podem assim variar de posição

possibilitando alterar as áreas do modelo e desta maneira dar-lhe uma forma semelhante ao modelo de vigas inicial, mas a funcionar com elementos de casca. Nas figuras 4.20b e 4.20c, mostra-se o modelo, em escala mais reduzida, com duas larguras das lâminas diferentes: na figura 4.20b, o modelo utiliza uma largura de 10 mm, e na figura 4.20c uma largura com 45 mm. Mantêm-se comuns e fixas as coordenadas dos pontos escolhidos para a leitura do valor dos modos de vibração, para coincidirem sempre com as dos pontos do modelo de referência. Observando a figura 4.20c, quando a largura das lâminas é de maior dimensão, verifica-se que algumas áreas posicionadas sobre os eixos de simetria do modelo diminuem consideravelmente. No limite, quando as larguras atribuídas aos rectângulos que formam cada uma das áreas, em que toda a placa está dividida, atingirem 50 mm, o modelo toma a forma mais parecida com o modelo de referência, dado que a placa é quadrada com 300 mm de lado. No entanto o seu centro torna-se instável com alguns pontos a coincidirem na sua posição geométrica originando áreas nulas e instabilidade nos resultados do programa de cálculo de elementos finitos. Comprova-se este facto fazendo correr no ANSYS vários modelos com diversas larguras de lâminas tendo-se verificado que próximo de 49 mm as frequências naturais são muito semelhantes às do modelo de referência. Com uma largura das lâminas de 50 mm o programa não é possível obter resultados.

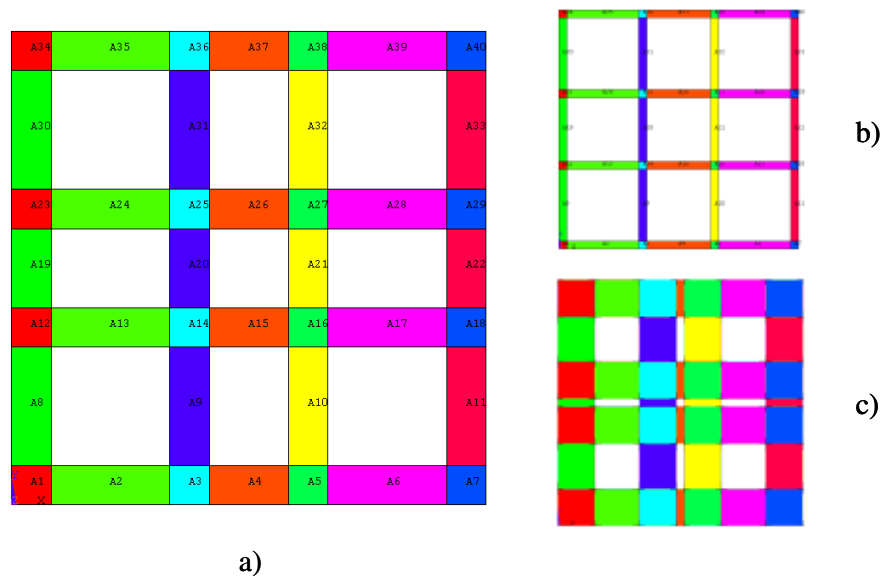


Figura 4.20 Aspecto geral do modelo numérico de lâminas: a) o modelo com identificação das áreas intervenientes; b) Modelo em escala mais reduzida utilizando uma largura de 10 mm; c) Modelo utilizando larguras de 45 mm.

Definido o modelo numérico, inicia-se o programa de melhoramento. Na escolha dos parâmetros a variar, considera-se de momento que a estrutura da placa é constituída por 4 vigas horizontais e 4 verticais, cada uma composta por sete áreas associadas, num total 8 larguras variáveis. O módulo de elasticidade, a densidade, o coeficiente de Poisson e a espessura, são consideradas variáveis comuns para todas as vigas pelo que se utilizam um total de 12 variáveis. A construção do modelo em elementos finitos é concebido de forma a possibilitar esta hipótese. Mais uma vez mantêm-se as condições de optimização já utilizadas nos modelos anteriores, mostradas na tabela 4.4 e as variáveis são de novo adimensionalizadas.

Seguindo o mesmo critério, utilizado nas análises anteriores com elementos de viga, as primeiras análises são feitas utilizando valores iniciais unitários. Os resultados obtidos estão apresentados para a primeira análise na tabela 4.30. Observa-se que a solução óptima encontrada converge também para valores finais das variáveis muito próximos da unidade. Apesar dos limites impostos serem bastante elevados o optimizador não os utiliza, convergindo para uma solução, mas de fraca qualidade. O valor da função objectivo de 13.1 mostra com clareza a má qualidade dos resultados. Este resultado está corrigido de forma a ser possível compará-lo com os resultados obtidos no modelo de vigas.

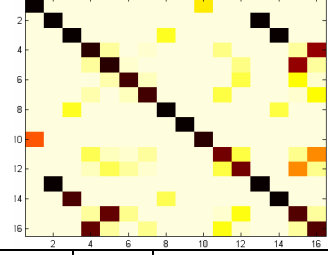
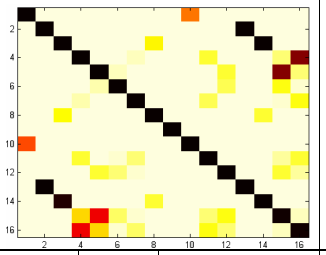
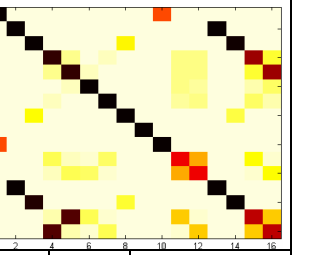
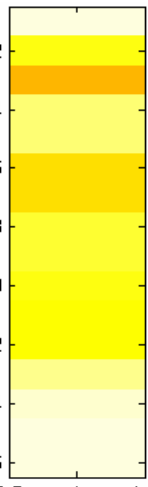
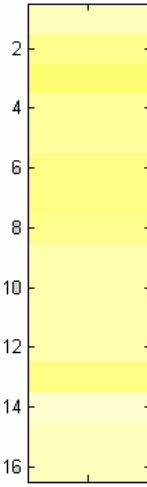
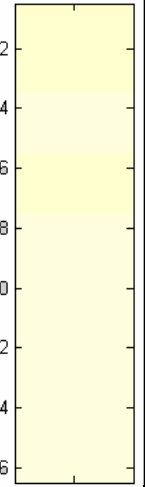
Dada a simetria da peça e perante os maus resultados obtidos, decide-se ensaiar o modelo apenas com uma variável, a largura. As propriedades do material são fixas e iguais às do modelo de referência e assume-se que todas as vigas possuem a mesma largura, sendo esta a variável a usar. Os resultados são mostrados na mesma tabela 4.30, nas colunas correspondentes à segunda análise.

Analisando os resultados obtidos, nota-se uma melhoria acentuada, com a matriz *MAC* a apresentar uma diagonal praticamente com todos os valores unitários, o que significa que o modelo final obtido com a largura das vigas de 49.84 mm (variáveis  $lg_1$  a  $lg_8 = 4.984$ ) apresenta modos de vibração muito idênticos aos do modelo de referência.

Embora não seja observável nos resultados apresentados, o programa de melhoramento continua a reordenar as frequências naturais em função de uma melhor correlação nos modos de vibração, por efeito da função *ASMAC*. Isto acontece nas 6ª e 7ª frequências de 254.5 Hz e na 15ª e 16ª de 580.9 Hz, cujos modos de vibração de flexão são

simétricos, devido à simetria da peça, sendo trocados durante a ordenação apresentada pelos resultados do programa FEM.

Tabela 4.30 Comparação entre resultados obtidos nas três primeiras análises de melhoramento da placa quadrada utilizando elementos de casca

| Variável        | Ensaio 1 (lâmina)   |                  |   |            | Ensaio 2 (lâmina)  |                  |  |            | Ensaio 3 (lâmina)   |                  |   |            |
|-----------------|---|------------------|---|------------|--|------------------|--|------------|---|------------------|---|------------|
|                 | Lim. Inf.   | Val. Ini.        | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.  | Val. Ini.        | Lim. Sup.  | Val. final | Lim. Inf.   | Val. Ini.        | Lim. Sup.   | Val. final |
| $E_x$           | 0.9   | 1                | 3   | 1.018      | 1.69   | 1.69             | 1.69   | 1.69       | 1.69  | 1.69             | 1.69  | 1.69       |
| $\rho$          | 0.9   | 1                | 8   | 1.061      | 7.745  | 7.745            | 7.745  | 7.745      | 7.745   | 7.745            | 7.745   | 7.745      |
| $u_{xy}$        | 0.9   | 1                | 5   | 1.010      | 3.29   | 3.29             | 3.29   | 3.29       | 3.29  | 3.29             | 3.29  | 3.29       |
| $h$             | 0.8   | 1                | 3   | 1.018      | 1.82   | 1.82             | 1.82   | 1.82       | 1.82  | 1.82             | 1.82  | 1.82       |
| $lg_1$          | 0.8   | 1                | 8   | 1.003      | 2  | 2                | 8  | 4.984      | 2   | 2                | 8   | 8          |
| $lg_2$          | 0.8   | 1                | 8   | 1.061      | 2  | 2                | 8  | 4.984      | 4.95  | 4.95             | 4.95  | 4.95       |
| $lg_3$          | 0.8   | 1                | 8   | 1.061      | 2  | 2                | 8  | 4.984      | 4.95  | 4.95             | 4.95  | 4.95       |
| $lg_4$          | 0.8   | 1                | 8   | 1.003      | 2  | 2                | 8  | 4.984      | 2   | 2                | 8   | 8          |
| $lg_5$          | 0.8   | 1                | 8   | 1.003      | 2  | 2                | 8  | 4.984      | 2   | 2                | 8   | 8          |
| $lg_6$          | 0.8   | 1                | 8   | 1.062      | 2  | 2                | 8  | 4.984      | 4.95  | 4.95             | 4.95  | 4.95       |
| $lg_7$          | 0.8   | 1                | 8   | 1.062      | 2  | 2                | 8  | 4.984      | 4.95  | 4.95             | 4.95  | 4.95       |
| $lg_8$          | 0.8   | 1                | 8   | 1.003      | 2  | 2                | 8  | 4.984      | 2   | 2                | 8   | 8          |
| Valor objectivo | 13.11088102   |                  |   |            | 4.306757219  |                  |  |            | -0.430443298  |                  |   |            |
| Matriz MAC      |  |                  |   |            |  |                  |  |            |  |                  |   |            |
| $\omega_{ref}$  | $\omega_{inicial}$  | $\omega_{final}$ | Correlação de frequências   |            | $\omega_{inicial}$   | $\omega_{final}$ | Correlação de frequências  |            | $\omega_{inicial}$  | $\omega_{final}$ | Correlação de frequências   |            |
| 60.8            | 60.5  | 61.2             |  |            | 50.7   | 58.7             |  |            | 64.6  | 60.2             |  |            |
| 88.6            | 70.2  | 70.7             |   |            | 64.9   | 81.9             |  |            | 76.4  | 87.2             |   |            |
| 112.2           | 74.5  | 74.6             |   |            | 72.4   | 100.1            |  |            | 95.2  | 110.0            |   |            |
| 158.0           | 139.1   | 139.3            |   |            | 122.4  | 147.0            |  |            | 134.9   | 156.8            |   |            |
| 158.0           | 139.1   | 139.3            |   |            | 122.4  | 147.0            |  |            | 134.9   | 156.8            |   |            |
| 280.5           | 206.1   | 206.2            |   |            | 200.1  | 254.5            |  |            | 228.6   | 276.3            |   |            |
| 280.5           | 206.1   | 206.2            |   |            | 200.1  | 254.5            |  |            | 228.6   | 276.3            |   |            |
| 289.9           | 239.3   | 239.5            |   |            | 216.3  | 265.4            |  |            | 225.7   | 289.2            |   |            |
| 315.2           | 261.4   | 261.3            |   |            | 242.9  | 297.8            |  |            | 273.6   | 314.0            |   |            |
| 354.2           | 283.9   | 282.5            |   |            | 273.2  | 338.9            |  |            | 296.6   | 351.7            |   |            |
| 481.3           | 372.3   | 372.5            |   |            | 360.8  | 460.4            |  |            | 410.6   | 484.5            |   |            |
| 481.3           | 372.3   | 372.5            |   |            | 360.8  | 460.4            |  |            | 410.6   | 484.5            |   |            |
| 536.9           | 493.2   | 491.2            |   |            | 435.1  | 485.5            |  |            | 436.5   | 533.6            |   |            |
| 563.6           | 556.0   | 554.6            |   |            | 503.0  | 557.5            |  |            | 600.1   | 562.3            |   |            |
| 603.2           | 605.7   | 603.2            |   |            | 538.0  | 580.9            |  |            | 548.6   | 599.0            |   |            |
| 603.2           | 605.7   | 603.2            |   |            | 538.0  | 580.9            |  |            | 548.6   | 599.0            |   |            |

Para um melhor emparelhamento o programa de melhoramento corrige os pares modo de vibração frequência natural reordena-os de forma a que correspondam melhor entre si nos modelos de elementos finitos e de referência.

A terceira análise é uma evolução da segunda, variando apenas as vigas exteriores da peça, aproximando ainda mais, em termos geométricos, o modelo numérico do modelo de referência. O valor obtido pela função objectivo, neste caso é de  $-0.43$  devido a boas correlações em termos das características dinâmicas entre os modelos. Nota-se, no entanto, que a diagonal da matriz *MAC* não evolui em termos de resultados para os modos de vibração correspondentes às frequências mais elevadas, provavelmente devido à instabilidade do modelo numérico provocado pelas suas áreas de dimensão reduzida.

Apesar dos bons resultados obtidos na terceira análise, apresentados na tabela 4.30, conclui-se que a escolha do ponto de partida para se obter a melhor solução óptima influencia o resultado final. Contrariamente ao exemplo anterior, a ocorrência de vários mínimos relativos condicionam a obtenção da melhor solução óptima, como acontece no primeiro ensaio. É necessário tentar compreender os motivos que impedem o optimizador de progredir para a melhor solução, ou seja de chegar a uma solução do modelo numérico que, com boa aproximação, represente dinamicamente o modelo de referência. Este é o tema dos pontos seguintes.

#### 4.4 Limitações do Método de Melhoramento.

Pelo que se apresenta na tabela 4.30, observa-se que os resultados após cada optimização variam, mesmo partindo de valores iniciais iguais. Basta restringir o campo de variação das variáveis utilizando limites superiores e inferiores com valores diferentes ou variar os parâmetros de controlo do optimizador. É certo que o objectivo pretendido não é obter uma solução numérica que seja, em termos geométricos, igual à de referência, mas sim obter uma solução que seja equivalente em termos de comportamento dinâmico. Como existem demasiadas variáveis em jogo não é evidente a forma de descobrir a causa deste problema. Opta-se então por escolher apenas uma variável de cada vez para fazer esta análise, começando, por exemplo pela largura das vigas e observar a evolução da forma do modelo numérico. Para isso associa-se a variável  $lg_1$  a todas as vigas exteriores e a variável *PRLGA1* a todas as vigas interiores do modelo numérico. Os restantes parâmetros ( $E_x$ ,  $\rho$ ,  $u_{xy}$  e  $h$ ) mantêm-se constantes e iguais aos utilizados na análise 3. Atribuem-se valores



iniciais distintos a cada variável dentro dos limites estabelecidos obtendo-se novos resultados para a função objectivo, em função de cada variável  $lg_1$  e  $lg_{AI}$  inclusive alguns óptimos relativos diferentes. Do registo desses valores durante as sucessivas optimizações construíram-se os gráficos representados nas figuras 4.21 e 4.22.

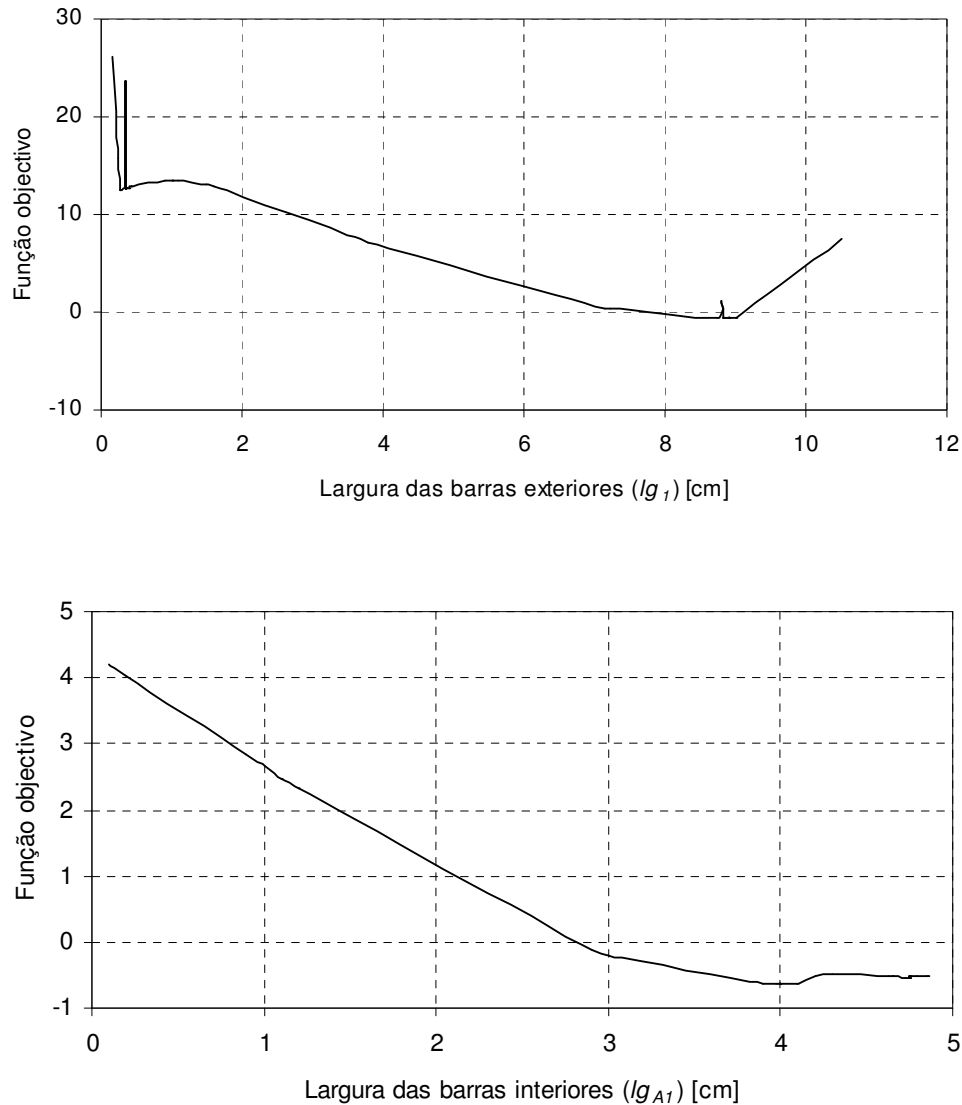


Figura 4.21 Evolução do valor da função objectivo com a variação dos parâmetros  $lg_1$  (barras exteriores) e  $lg_{AI}$  (barras interiores) durante a optimização.

Pela leitura do gráfico de evolução da função objectivo em função da variável  $lg_1$ , figura 4.21, pode-se observar que o valor da função objectivo é fortemente não linear apresentando duas zonas onde ocorrem mínimos. Naturalmente que o melhor mínimo

ocorre próximo de  $lg_I=9$ , no entanto, se o ponto de partida for 1, o otimizador pode convergir para  $lg_I=0.34$ , dependendo do incremento atribuído e dos limites impostos. Este tipo de convergência também se verifica na análise do modelo inicial apresentado na tabela 4.30 e daí o mau resultado obtido para a função objectivo nesse ensaio.

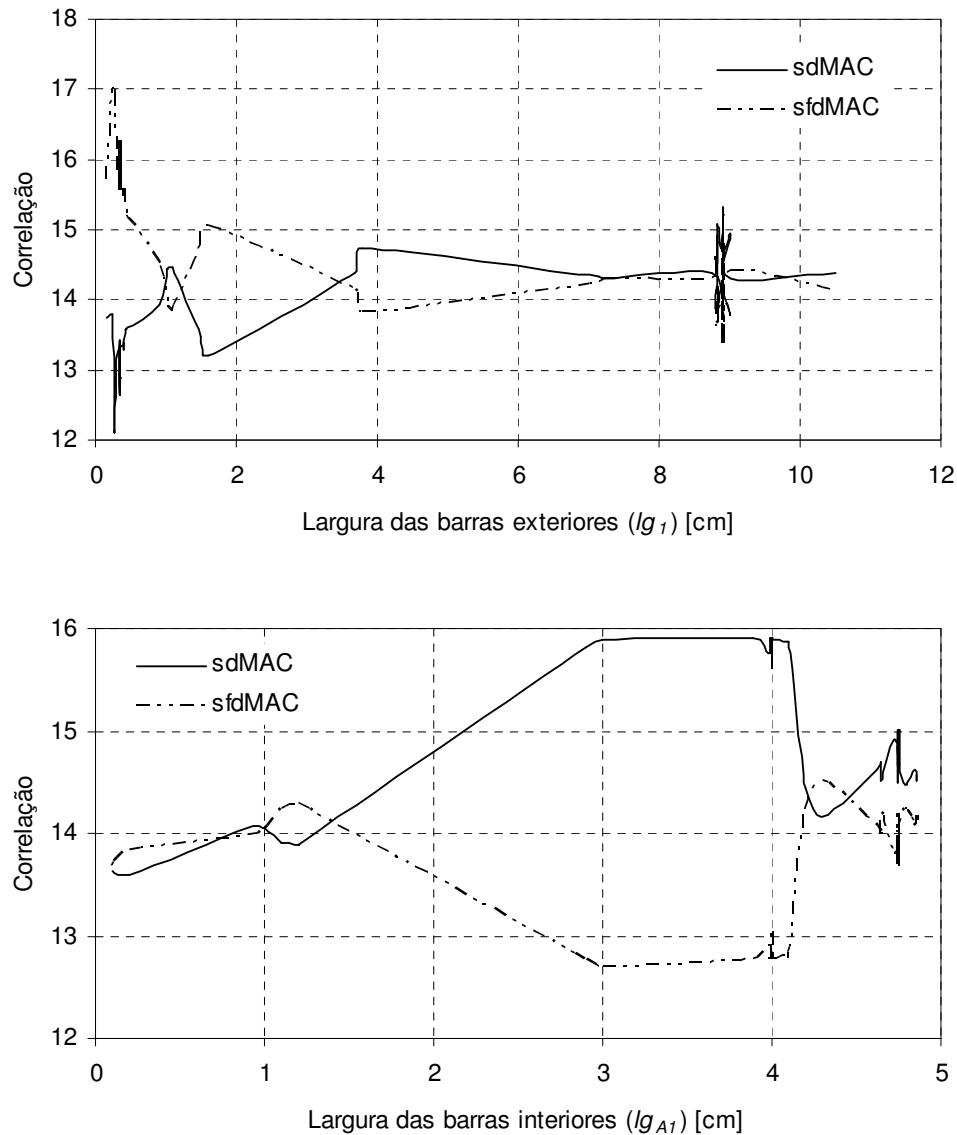


Figura 4.22 Evolução da soma dos valores da diagonal *MAC* (sdMAC) e da soma dos valores fora da diagonal *MAC* (sfdMAC) em relação à variação dos parâmetros  $lg_I$  (barras exteriores) e  $lg_{AI}$  (barras interiores) durante a optimização.

Analisando agora a evolução dos resultados dos números *MAC* de correlação entre os modos de vibração, apresentados na figura 4.22, observa-se a forte descontinuidade das

funções apresentadas. Opta-se por representar a evolução da soma dos valores da diagonal *MAC* (sdMAC) e da soma dos valores fora da diagonal *MAC* (sfdMAC) em vez dos seus valores adimensionalizados, pois mostram com mais clareza a sua evolução. Como a matriz *MAC* obtida nestes ensaios é de 16x16 elementos, o valor máximo esperado para sdMAC é 16, a que corresponde uma diagonal principal da matriz totalmente unitária e consequentemente uma correlação perfeita nos modos de vibração em comparação. Por sua vez o valor ideal da sfdMAC é zero, a que corresponde todos os valores fora da diagonal *MAC* nulos e portanto nenhum outro par de valores apresenta correlação entre si sendo a solução única. No caso dos diagramas apresentados nas figuras 4.21 e 4.22, conclui-se que há uma correlação quase perfeita para valores de  $l_{gAI}$  entre 3 e 4, divergindo ligeiramente nos restantes. Mesmo assim verifica-se que para os valores mais fracos de sdMAC estes são superiores a 14, ou muito próximos desse valor. Tal significa que há liberdade de escolha do valor da variável na procura da optimização, podendo-se incidir a pesquisa na componente frequência sem ser necessário dar excessiva atenção à componente da forma do modo de vibração, uma vez que o programa de optimização em cada análise compatibiliza o melhor possível as formas dos modos, como foi descrito anteriormente. Outro aspecto a observar na figura 4.22 é uma certa simetria entre as curvas, verificando-se que com o aumento do valor do sdMAC há uma consequente diminuição do sfdMAC, o que indica que o processo de optimização está a conjugar correctamente os dois efeitos na tentativa de obter uma matriz dos modos de vibração o mais perfeita possível.

Análises idênticas são feitas em relação às restantes variáveis tendo-se chegado a conclusões semelhantes, embora apresentando curvas de variação diferentes. Por tal razão não são aqui apresentadas.

#### 4.4.1 Parâmetros do Método de Melhoramento

Analisando a limitação do número máximo de iterações permitido ao programa de optimização durante várias análises, pode-se constatar que, em qualquer uma que caminhe para um óptimo aceitável, cujo valor da função objectivo seja unitário, ao fim da terceira iteração, o valor da função objectivo já está muito próximo desse objectivo, como se pode ver no gráfico mostrado na figura 4.23.

O optimizador caminha muito rapidamente para a solução óptima, caso esta esteja dentro do seu campo de intervenção, utilizando a maior parte das avaliações apenas quando

se encontra já perto da solução óptima. Pode-se aproveitar esta particularidade para tentar resolver o problema dos mínimos relativos sem provocar um excessivo dispêndio de tempo na escolha dos melhores valores iniciais para as variáveis. A ideia consiste em fazer uma exploração prévia mais abrangente do campo de variação das variáveis para escolher o melhor ponto de partida. Para isso, divide-se o espaço dos parâmetros em várias partes obtendo-se diversos valores intermédios para as variáveis que podem ser utilizados como valores iniciais alternativos a partir dos quais se tentam obter novos valores para a função objectivo. Na determinação das diversas soluções utiliza-se sempre o número mínimo de 3 iterações para não tornar o problema demasiadamente extenso. Naturalmente que se obtêm vários valores mínimos, todos relativos, mas um deles é o melhor de todos, portanto, com boa probabilidade corresponde ao melhor conjunto de variáveis de partida, dentro do seu campo admissível, para a obtenção da solução óptima.

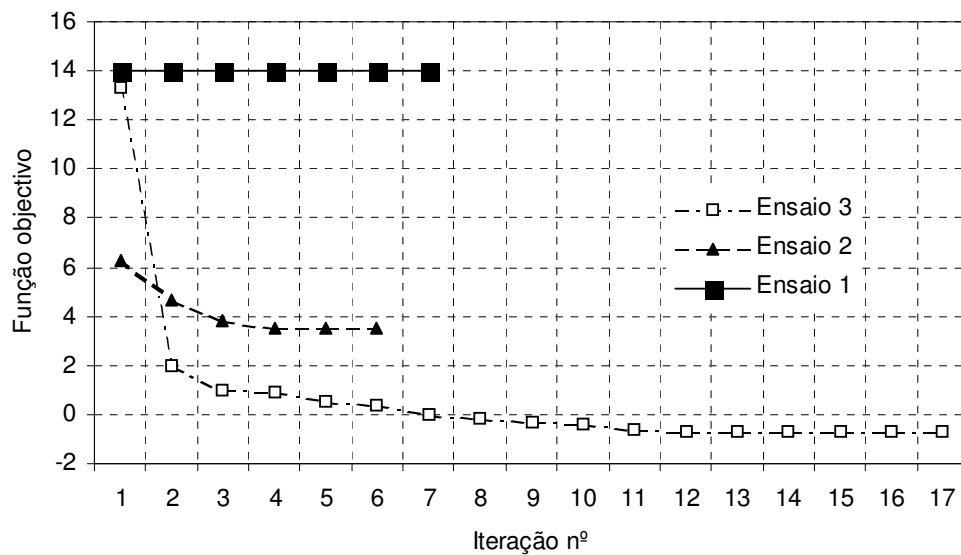


Figura 4.23 Evolução do valor da função objectivo em função do número de iterações realizado durante a optimização. Resultados obtidos através dos ensaios da tabela 4.26.

A exploração obtida com a análise inicial a partir da obtenção do melhor mínimo relativo entre os vários obtidos terá tanto mais interesse quanto mais extenso for o intervalo entre os limites de cada variável. É o caso por exemplo da variável  $l_g$ , largura das lâminas, que no último exemplo apresentado na tabela 4.30 podem variar entre 0.8 e 8 cm. Uma vez escolhido o valor das variáveis que melhor conduzem à obtenção do melhor mínimo relativo, então procede-se ao cálculo do valor óptimo final dando instruções ao

otimizador para prosseguir com o processo iterativo até ao limite imposto à tolerância do otimizador, não limitando o número de iterações envolvidas. Para demonstrar este processo utiliza-se o exemplo da placa em vibração livre mas atribuem-se valores às variáveis de acordo com a tabela 4.31.

Tabela 4.31 Exemplo de demonstração da escolha de valores iniciais

| Variável  | Limite inferior | Valor inicial | Limite superior |
|-----------|-----------------|---------------|-----------------|
| $E_x$     | 0.845           | 1.69          | 2.028           |
| $\rho$    | 3.8725          | 7.745         | 9.294           |
| $u_{xy}$  | 2.632           | 3.29          | 3.948           |
| $h$       | 0.5             | 1             | 3               |
| $lg_1$    | 0.9             | 3             | 7.8             |
| $lg_2$    | 0.9             | 3             | 7.8             |
| $lg_3$    | 0.9             | 3             | 7.8             |
| $lg_4$    | 0.9             | 3             | 7.8             |
| $lg_{A1}$ | 0.8             | 2             | 4.8             |
| $lg_{A2}$ | 0.8             | 2             | 4.8             |
| $lg_{A3}$ | 0.8             | 2             | 4.8             |
| $lg_{A4}$ | 0.8             | 2             | 4.8             |

As variáveis  $lg_1$  a  $lg_4$  referem-se à largura das lâminas de contorno do modelo, enquanto que as  $lg_{A1}$  a  $lg_{A4}$  referem-se à largura das lâminas interiores modelo. As restantes variáveis são comuns a toda a peça. Proceda-se então à divisão do campo entre limites das variáveis em 5 partes, permitindo obter 4 conjuntos de valores que são assumidos como iniciais, para além dos considerados inicialmente. Na tabela 3.32 apresentam-se os vários conjuntos de variáveis iniciais e o resultado obtido para a função objectivo de cada conjunto, assim como o resultado final.

Em todas as hipóteses são utilizados os mesmos limites superior e inferior, independentemente do ponto de partida com as opções impostas ao otimizador da mínima variação inicial de cada variável de 0.1 e a conclusão da optimização quando a tolerância do valor da função objectivo for menor que 0.001.

O valor obtido para a função objectivo de  $-0.42485$ , correspondente aos valores iniciais das variáveis da hipótese  $V_{i4}$  é sem dúvida o melhor, já indicando uma muito boa representatividade, em termos de correlação entre modos de vibração e frequências naturais, do modelo numérico relativamente ao de referência. Depois são utilizados estes mesmos valores das variáveis para fazer uma nova optimização do modelo agora sem

impor limites ao número de iterações, tendo-se obtido um valor final para a função objectivo de  $-0.79$  o que satisfaz ainda mais o objectivo em causa. Na tabela 4.33 mostram-se os principais resultados finais obtidos.

Tabela 4.32 Valores iniciais escolhidos

| Variável                        | Limite inferior | $V_{i0}$ | $V_{i1}$ | $V_{i2}$ | $V_{i3}$ | $V_{i4}$ | Limite superior |
|---------------------------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------------|
| $E_x$                           | 0.845           | 1.69     | 1.0816   | 1.3182   | 1.5548   | 1.7914   | 2.028           |
| $\rho$                          | 3.8725          | 7.745    | 4.9568   | 6.0411   | 7.1254   | 8.2097   | 9.294           |
| $u_{xy}$                        | 2.632           | 3.29     | 2.8952   | 3.1584   | 3.4216   | 3.6848   | 3.948           |
| $h$                             | 0.5             | 1        | 1        | 1.5      | 2        | 2.5      | 3               |
| $lg_1$                          | 0.9             | 3        | 2.28     | 3.66     | 5.04     | 6.42     | 7.8             |
| $lg_2$                          | 0.8             | 2        | 1.6      | 2.4      | 3.2      | 4        | 4.8             |
| $lg_3$                          | 0.8             | 2        | 1.6      | 2.4      | 3.2      | 4        | 4.8             |
| $lg_4$                          | 0.9             | 3        | 2.28     | 3.66     | 5.04     | 6.42     | 7.8             |
| $lg_{A1}$                       | 0.9             | 3        | 2.28     | 3.66     | 5.04     | 6.42     | 7.8             |
| $lg_{A2}$                       | 0.8             | 2        | 1.6      | 2.4      | 3.2      | 4        | 4.8             |
| $lg_{A3}$                       | 0.8             | 2        | 1.6      | 2.4      | 3.2      | 4        | 4.8             |
| $lg_{A4}$                       | 0.9             | 3        | 2.28     | 3.66     | 5.04     | 6.42     | 7.8             |
| Valor da função objectivo       |                 | 0.738    | -0.161   | 0.671    | -0.143   | -0.424   |                 |
| Valor final da função objectivo |                 |          |          |          |          | -0.788   |                 |

Uma observação sobre os valores obtidos nas variáveis após a conclusão das diversas análises permite concluir que não apresentam grande variação em relação aos valores iniciais. Esta particularidade poderá não ser muito favorável para as variáveis relativas às propriedades mecânicas do material por poderem originar um afastamento considerável do seu valor final para valores irrealistas, uma vez que os resultados em cada optimização são obtidos com um pequeno afastamento das variáveis em relação às atribuídas.

Procede-se assim a um novo estudo muito idêntico ao anterior, mas variando o valor inicial apenas nas variáveis que representam a largura das lâminas. Na tabela 4.34 apresenta-se a variante do exemplo anterior com os resultados obtidos. Opta-se por usar também sempre o mesmo valor inicial na variável  $h$  relativo à espessura, por o seu campo de variação ser pequeno e portanto aceitável em relação ao tamanho do incremento utilizado. Os resultados pioraram com o valor final da função objectivo a aumentar para  $-0.67$ . No entanto os valores das variáveis relativos às características do

material são agora mais realistas, ficando o modelo otimizado ainda com uma boa correlação, em termos de correlação entre as características dinâmicas, com o modelo de referência.

Tabela 4.33 Resultados finais após a escolha do melhor conjunto de valores de partida

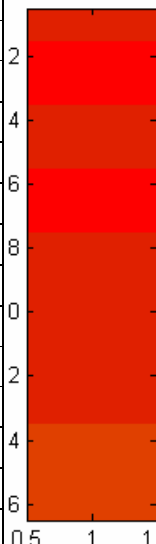
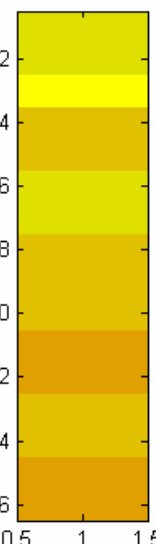
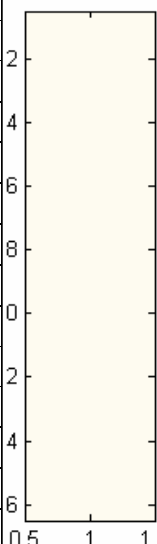
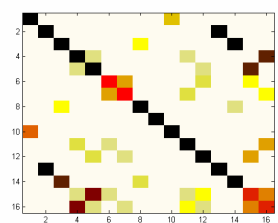
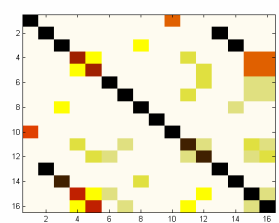
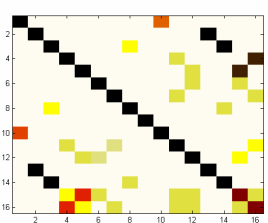
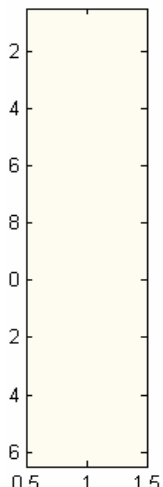
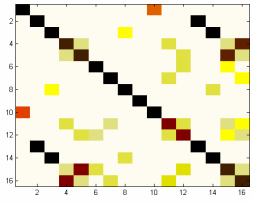
| Variável       | Valor inicial Vi0   |   | Valor inicial Vi4  |  | Valor final Vf4   |   |
|----------------|---|---|--|--|---|---|
| $E_x$          | 1.69  |   | 1.791  |  | 1.554   |   |
| $\rho$         | 7.745   |   | 8.21   |  | 9.294   |   |
| $u_{xy}$       | 3.29  |   | 3.685  |  | 3.322   |   |
| $h$            | 1   |   | 2.5  |  | 2.101   |   |
| $lg_1$         | 3   |   | 6.42   |  | 7.8   |   |
| $lg_2$         | 3   |   | 6.42   |  | 7.8   |   |
| $lg_3$         | 3   |   | 6.42   |  | 7.8   |   |
| $lg_4$         | 3   |   | 6.42   |  | 7.8   |   |
| $lg_{A1}$      | 2   |   | 4  |  | 4.8   |   |
| $lg_{A2}$      | 2   |   | 4  |  | 4.8   |   |
| $lg_{A3}$      | 2   |   | 4  |  | 4.8   |   |
| $lg_{A4}$      | 2   |   | 4  |  | 4.8   |   |
| $\omega_{ref}$ | $\omega_{inic}$   |   | $\omega_{inic}$  |  | $\omega_{final}$  |   |
| 60.752         | 42.132  |  | 78.249   |  | 60.563  |  |
| 88.595         | 57.004  |   | 112.022  |  | 87.614  |   |
| 112.234        | 66.512  |   | 141.334  |  | 110.566   |   |
| 157.987        | 109.486   |   | 206.469  |  | 157.919   |   |
| 157.987        | 109.486   |   | 206.469  |  | 157.919   |   |
| 280.469        | 182.794   |   | 362.262  |  | 278.296   |   |
| 280.469        | 182.794   |   | 362.262  |  | 278.296   |   |
| 289.855        | 197.885   |   | 381.445  |  | 291.465   |   |
| 315.243        | 221.914   |   | 418.184  |  | 316.605   |   |
| 354.213        | 254.745   |   | 475.443  |  | 355.225   |   |
| 481.339        | 335.330   |   | 647.330  |  | 488.965   |   |
| 481.339        | 335.330   |   | 647.330  |  | 488.965   |   |
| 536.873        | 378.792   |   | 704.446  |  | 537.844   |   |
| 563.579        | 417.478   |   | 750.170  |  | 567.142   |   |
| 603.196        | 464.866   |   | 811.548  |  | 604.822   |   |
| 603.196        | 464.866   |   | 811.548  |  | 604.822   |   |
| MAC            |  |   |  |  |  |   |
|                |   |   |  |  |   |   |
|                |   |   |  |  |   |   |

Tabela 4.34 Variante do exemplo de demonstração da escolha de valores iniciais

| Variável                        | Limite inferior | Vi0   | Vi1   | Vi2   | Vi3    | Vi4    | Limite superior |
|---------------------------------|-----------------|-------|-------|-------|--------|--------|-----------------|
| $E_x$                           | 0.845           | 1.69  | 1.69  | 1.69  | 1.69   | 1.69   | 2.028           |
| $\rho$                          | 3.8725          | 7.745 | 7.745 | 7.745 | 7.745  | 7.745  | 9.294           |
| $u_{xy}$                        | 2.632           | 3.29  | 3.29  | 3.29  | 3.29   | 3.29   | 3.948           |
| $h$                             | 0.5             | 1     | 1     | 1     | 1      | 1      | 3               |
| $lg_1$                          | 0.9             | 3     | 2.28  | 3.66  | 5.04   | 6.42   | 7.8             |
| $lg_2$                          | 0.8             | 2     | 1.6   | 2.4   | 3.2    | 4      | 4.8             |
| $lg_3$                          | 0.8             | 2     | 1.6   | 2.4   | 3.2    | 4      | 4.8             |
| $lg_4$                          | 0.9             | 3     | 2.28  | 3.66  | 5.04   | 6.42   | 7.8             |
| $lg_{A1}$                       | 0.9             | 3     | 2.28  | 3.66  | 5.04   | 6.42   | 7.8             |
| $lg_{A2}$                       | 0.8             | 2     | 1.6   | 2.4   | 3.2    | 4      | 4.8             |
| $lg_{A3}$                       | 0.8             | 2     | 1.6   | 2.4   | 3.2    | 4      | 4.8             |
| $lg_{A4}$                       | 0.9             | 3     | 2.28  | 3.66  | 5.04   | 6.42   | 7.8             |
| Valor da função objectivo       |                 | 0.738 | 1.642 | 1.320 | -0.028 | -0.338 |                 |
| Valor final da função objectivo |                 |       |       |       |        | -0.674 |                 |

Na tabela 4.35 apresentam-se os valores obtidos nas variáveis após a conclusão do processo de optimização assim como os diagramas de correlação entre as frequências e os modos de vibração (*MAC* final).

Tabela 4.35 Resultados finais

| Valor final das variáveis |          | Freq ref. | Freq final |   | MAC final   |
|---------------------------|----------|-----------|------------|---|---|
| $E_x$                     | 1.534625 | 60.75159  | 59.46921   |  |  |
| $\rho$                    | 8.457109 | 88.59483  | 85.95786   |   |   |
| $u_{xy}$                  | 3.719351 | 112.2344  | 110.8284   |   |   |
| $h$                       | 2.022212 | 157.9873  | 155.8135   |   |   |
| $lg_1$                    | 7.096072 | 157.9873  | 155.8135   |   |   |
| $lg_2$                    | 7.096046 | 280.469   | 277.2078   |   |   |
| $lg_3$                    | 7.096449 | 280.469   | 277.2078   |   |   |
| $lg_4$                    | 7.095658 | 289.8554  | 287.7499   |   |   |
| $lg_{A1}$                 | 4.8      | 315.2434  | 313.7278   |   |   |
| $lg_{A2}$                 | 4.8      | 354.2126  | 357.2571   |   |   |
| $lg_{A3}$                 | 4.8      | 481.3394  | 487.1514   |   |   |
| $lg_{A4}$                 | 4.8      | 481.3394  | 487.1514   |   |   |
|                           |          | 536.8731  | 535.5429   |   |   |
|                           |          | 563.5788  | 571.6827   |   |   |
|                           |          | 603.1955  | 608.0235   |   |   |
|                           |          | 603.1956  | 608.0235   |   |   |



## 4.5 Sumário e Discussão

Para concretizar os objectivos deste capítulo recorre-se a dois exemplos muito simples, a viga de secção rectangular e uma placa quadrada. Em ambos os casos conhece-se o seu comportamento dinâmico, pelo que se prestam para um ensaio rigoroso do programa de melhoramento desenvolvido. Criam-se modelos numéricos cujos resultados são comparados com os obtidos por métodos analíticos e depois utilizados como referência. Criam-se ainda outros modelos numéricos mais simples que se destinam a ser melhorados pelo programa desenvolvido. Uma escolha criteriosa dos elementos do modelo de elementos finitos é fundamental para ser possível obter um modelo suficientemente bem correlacionado com o de referência. Como critério de avaliação da correlação entre os modelos são utilizados a matriz *MAC*, afectada pela *ASMAC*, para a comparação entre os modos de vibração e a matriz coluna de comparação entre frequências naturais.

O primeiro exemplo estudado permite observar principalmente a evolução da optimização em termos das frequências e observa-se a influência do número de elementos na qualidade dos modos de vibração obtidos. Um número demasiadamente reduzido conduz a formas dos modos mal configuradas e um número muito elevado leva ao aparecimento de erros de cálculo provocados pela diminuição exagerada do tamanho dos elementos finitos utilizados.

Foi analisado o efeito da variação das variáveis de optimização e a sua influência no resultado final. Observou-se que o coeficiente de Poisson tem muito pouca influência, enquanto que a espessura é a variável mais influente.

Verifica-se que o tamanho do campo de variação das variáveis tem influência no seguimento do processo de optimização, notando-se que campos com maior amplitude permitem normalmente a melhores soluções óptimas. Quanto aos valores iniciais das variáveis, estes também influenciam a qualidade dos resultados não se detectando nenhuma regra estabelecida para a sua influência. Não é seguro que se consiga obter o melhor mínimo absoluto no intervalo estabelecido. No entanto o objectivo deste trabalho é obter um modelo que reproduza dinamicamente outro de referência e esse objectivo pode ser alcançado sem haver necessidade de se conseguir o melhor óptimo absoluto. Basta que o valor da função objectivo seja próximo de zero para se obter um modelo bem correlacionado, num máximo de  $-1$ .

Devido às diferentes dimensões das variáveis, um processo de adimensionalização é fundamental. Este processo foi testado e verificada a sua funcionalidade. As variáveis são transformadas para valores próximos da unidade e depois reconvertidas para a sua verdadeira grandeza antes de serem utilizadas no cálculo de elementos finitos. Consequência desta adimensionalização, a escolha dos incrementos a utilizar está limitada a um valor máximo de 0.1.

Surgem normalmente dificuldades na escolha do melhor conjunto de valores das variáveis iniciais no início do processo de optimização, pelo que se apresenta uma análise por intervalos dentro de limites aceitáveis de forma a tentar obter os valores iniciais mais adequados para se conseguir o melhor mínimo. Desta forma assegura-se que o limite máximo de iterações não é ultrapassado no processo de busca do óptimo conduzindo à identificação desse número precoce.

## **CAPÍTULO 5 – IDENTIFICAÇÃO MODAL, CONCEITOS BÁSICOS**

Numa análise experimental pretende-se que os resultados reflectam a resposta estrutural de forma próxima da realidade. Os resultados experimentais podem no entanto ter vícios e metodologias de aquisição que limitam fortemente a sua validade. Sempre que adquiridos com as metodologias apropriadas os valores experimentais são aceites como correctos, dentro dos limites possíveis para o equipamento e procedimentos utilizados e considerados aqui como valores de referência para as técnicas de melhoramento do modelo de elementos finitos. Para se interpretar os fenómenos ocorridos experimentalmente, é necessário observá-los. Tal observação acarreta sempre problemas pois, normalmente, não é possível observar sem que se interfira no processo que decorre do acto experimental. Assim os resultados podem ser alterados deturpando as conclusões. Como exemplo pode referir-se a presença da massa dos transdutores de vibração no corpo em observação e respectivos cabos, que podem influenciar fisicamente e electronicamente os resultados experimentais.

Face a estas circunstâncias a minimização das interferências requiere uma preparação prévia, procurando aumentar o conhecimento sobre os sinais esperados, condições ambientais e bandas de resposta envolvidas aumentando assim a avaliação crítica dos

resultados obtidos. Com um cuidadoso procedimento experimental é possível minimizar o ruído e obter informação que pode ser suficiente para conduzir a bons resultados.

Os testes modais conduzem a resultados experimentais que permitem obter as medidas de vibração de um sistema em condições controladas de ensaio. Isto representa uma vantagem deste processo de análise pois permite que uma estrutura ou componente estrutural seja analisada com eficiência fora do que seu ambiente normal de trabalho (Ewins, 2000:2). Este procedimento permite obter maior precisão na estimativa das frequências naturais, assim como, na descrição dos modos de vibração e permitir correlacionar os modelos experimentais com os modelos numéricos ou analíticos. No entanto, não é em geral possível prever, a partir dos modelos numéricos ou analíticos, o amortecimento de cada modo de vibração (Ewins, 2000:4). Esta é uma das limitações no correlacionamento dos resultados numéricos com os obtidos nos testes experimentais.

A evolução nos procedimentos de correlação e comparação entre os resultados numéricos e os experimentais ou modelos detalhados, designados aqui como resultados de referência, o desenvolvimento de métodos de melhoramento mais avançados que não envolvam processos de tentativa-erro, na aproximação entre os modelos.

## 5.1 Introdução

A análise modal é um processo de descrição de uma estrutura em termos das suas características naturais, frequência, amortecimento e modos de vibração, ou seja, o conjunto das suas propriedades dinâmicas. A informação modal é extremamente útil para ser usada como apoio ao projecto de qualquer estrutura. Uma destas aplicações é a modificação dinâmica estrutural, que usa os dados modais para determinar os efeitos nas características de um sistema de mudanças físicas estruturais. A análise destas mudanças pode ser feita sem se modificar fisicamente a estrutura até que se encontre um critério de projecto adequado. Pode-se sim, usar a modelação por elementos finitos para simular a carga-resposta numa estrutura, para avaliar a sua resposta.

Considerando uma placa suportada livremente, tal como a apresentada na figura 5.1, solicitada por uma força tipo sinusoidal aplicada próximo de uma das suas extremidades permite a medida da sua resposta dinâmica utilizando pelo menos um acelerómetro

aplicado noutra extremidade da placa. Medindo a resposta da placa para várias frequências de excitação observa-se que as amplitudes dos deslocamentos apresentam máximos para algumas frequências, que correspondem às frequências naturais da estrutura. Esta informação, em termos de deslocamentos pode ser descrita em função do tempo, mas é muito mais ilustrativa se for apresentada em função da frequência, o que se designa por função de resposta em frequência (FRF). Na figura 5.2 apresenta-se um exemplo de uma função deste tipo.

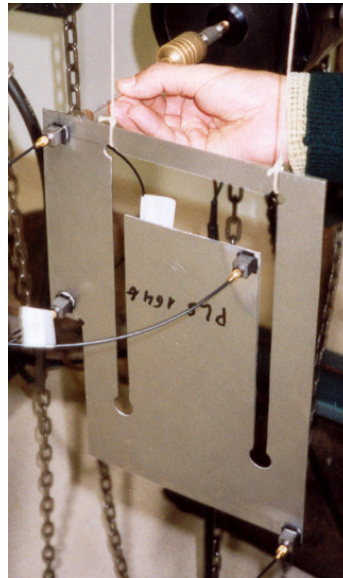


Figura 5.1 Exemplo de aplicação numa placa

As técnicas experimentais de análise modal assentam fundamentalmente em três aspectos, que se interligam entre si:

- Análise inicial, analítica ou numérica, do comportamento dinâmico da estrutura;
- Preparação e medição dos resultados dinâmicos experimentais;
- Análise e tratamento detalhados dos dados recolhidos.

Uma escolha criteriosa do equipamento experimental a utilizar na análise implica um conhecimento prévio, mesmo que pouco pormenorizado, do comportamento dinâmico da estrutura. O mesmo acontece no tratamento dos resultados obtidos experimentalmente, principalmente para baixas frequências. Há muitas aproximações traduzidas por algoritmos, para a fase de ajustamento do seguimento das curvas, eventualmente

traduzindo-se em várias hipóteses de solução para o mesmo problema. Uma solução completa para um problema de vibrações livres num sistema de vários graus de liberdade (MGDL) é composto por duas matrizes,  $\Lambda$  e  $\Phi$ , as quais são normalmente designadas como as propriedades modais ou as matrizes de valores próprios ou frequências naturais e vectores próprios, ou modos de vibração. Um elemento da diagonal da matriz de valores próprios  $\omega_r^2$  contem a frequência natural para o modo normal de vibração  $r$  do sistema, enquanto a coluna correspondente,  $\phi_r$ , a partir da matriz de vectores próprios,  $\Phi$ , descreve a forma do mesmo modo de vibração;  $\phi_{jr}$  é o elemento  $j$  do vector próprio  $\phi_r$ .

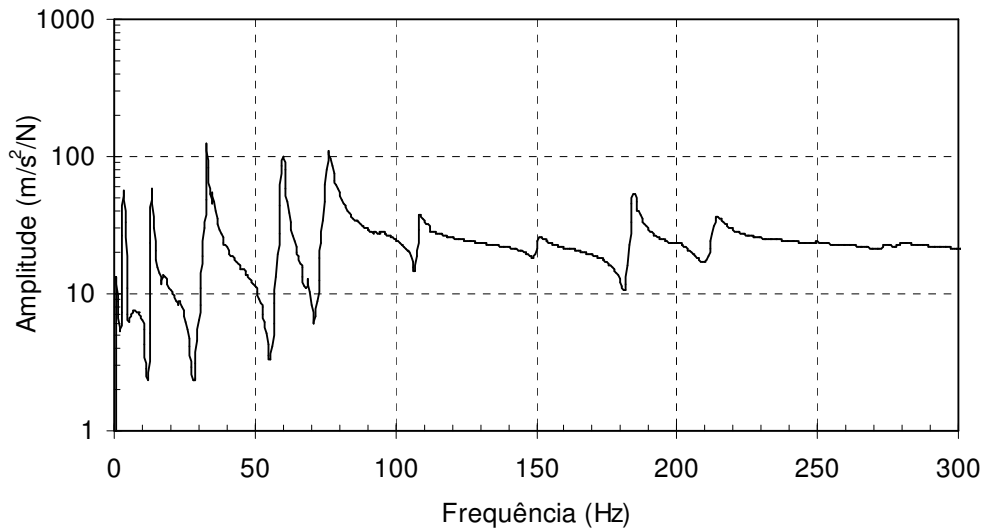


Figura 5.2 Exemplo de uma Função de Resposta em Frequência (FRF) (diagrama de Bode) obtido no ensaio da estrutura representada na figura 5.1

Aplicando uma excitação à estrutura obtém-se a resposta forçada através da resolução da equação do movimento, cuja solução é descrita pela matriz de resposta em frequência  $\mathbf{H}(\omega)$ . Os elementos desta matriz são dependentes da frequência, tendo cada um, uma função de resposta de frequência. Tanto a excitação como a resposta são descritas utilizando números complexos sob a forma de amplitude e fase, constituindo a função de resposta em frequência (FRF). O interesse desta função, utilizada no domínio da frequência, deve-se a poder ser medida experimentalmente, constituindo assim um fundamento da análise modal. A expressão da função de resposta em frequência apresenta-se da seguinte forma:

$$H_{jk}(\omega) = \alpha_{jk}(\omega) = \frac{\overline{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r\overline{A}_{jk}}{\omega_r^2(1+i\eta_r) - \omega^2} \quad (5.1)$$

onde a FRF se apresenta sob a forma de receptância  $\alpha_{jk}(\omega)$  como resposta em forma de deslocamento complexo  $\overline{X}_j$  num dos graus de liberdade,  $j$ , provocado pela força de excitação  $F_k$ , aplicada num grau de liberdade diferente,  $k$ . Nesta mesma expressão  $\eta_r$  é a razão de amortecimento histerético, normalmente designada por factor de perda, e  ${}_r\overline{A}_{jk} = (A_r e^{i\phi_r})_{jk}$  é a constante modal complexa, ambas associadas com cada modo  $r$ . É na equação (5.1) que assenta o processo de determinação dos modos de vibração a partir dos resultados experimentais, que é normalmente utilizada pelas metodologias de identificação modal. Este processo baseia-se no método de aproximação por circunferências (Ewins, D. J., 1984) e representa uma das formas de determinar os parâmetros modais.

A receptância  $\alpha_{jk}(\omega)$  de um sistema com  $N$  graus de liberdade (GDL), com amortecimento histerético, em que o modelo histerético é geralmente tido como mais conforme ao comportamento verificado experimentalmente do que os modelos viscoso ou proporcional, sem ter a complexidade dos modelos híbridos, é dada pela equação (5.1). A equação (5.1) pode também ser apresentada com o seguinte aspecto (Maia, N. M. M., Silva, J. M. M., e outros, 1998: 70-86):

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r\overline{A}_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} \quad (5.2)$$

O valor da razão de amortecimento  $\eta$  da equação (5.2) é obtido dividindo a medida da largura da banda de frequência na amplitude dos pontos, chamados de meia potência por  $\omega_n$ . Com referência à figura 5.3,  $\eta$  é calculado com base nos valores das frequências através de:

$$\eta = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_n^2} = \frac{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1)}{2\omega_n^2} \quad (5.3)$$

Assumindo a aproximação:

$$\omega_2 + \omega_1 \approx 2\omega_n, \quad (5.4)$$

leva à expressão simplificada para a razão de amortecimento dada por

$$\eta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n}. \quad (5.5)$$

Na análise das curvas de receptância, também designadas funções de transferência, são geralmente utilizados dois tipos de representação gráfica: o diagrama de Bode e o de Nyquist. No primeiro, são traçadas a amplitude e a fase em relação à frequência, em que normalmente a amplitude é representada em escala logarítmica. Nestes gráficos as ressonâncias localizam-se nos máximos, em forma de “picos”, e as anti-ressonâncias nos mínimos, também acentuados na amplitude, enquanto a fase apresenta variações geralmente bruscas quer num caso quer no outro. Na figura 5.2 apresenta-se um exemplo de diagrama de Bode mostrando a amplitude de uma função de resposta em frequência na escala logarítmica.

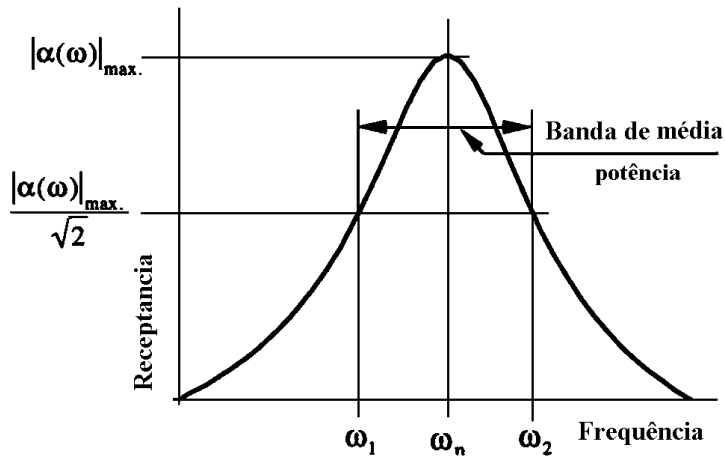


Figura 5.3 Representação dos pontos da banda de intensidade média de um pico de uma frequência de ressonância

No diagrama de Nyquist, cada valor da função de transferência representa-se no plano de Argand, complexo, pelas suas componentes real e imaginária. Neste caso, os modos surgem como arcos de circunferência, em que, para intervalos de frequência iguais, a ressonância corresponde ao maior espaçamento entre pontos consecutivos. No caso das constantes modais serem reais, os centros destes arcos situam-se sobre o eixo imaginário. Quando as constantes modais tomam valores complexos, os valores da função de



transferência situam-se em qualquer ponto do espaço de Argand o que dificulta a identificação visual ou analítica dos modos.

No entanto, apesar da facilidade de obtenção das frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , a determinação exacta da amplitude do pico em  $\omega_n$  apresenta normalmente algumas dificuldades. Por esta razão, recorre-se ao gráfico de Nyquist para uma determinação mais rigorosa. Efectivamente o gráfico de Nyquist realça a região correspondente à frequência de ressonância, dado que a circunferência nela descrita apresenta  $\omega_n$  no ponto de desfasamento a  $180^\circ$  com a FRF, para um sistema de um GDL, representado na figura 5.4. A equação do círculo é:

$$\text{Re}[\alpha(\omega)]^2 + \left\{ \text{Im}[\alpha(\omega)] + \frac{1}{2d} \right\}^2 = \left( \frac{1}{2d} \right)^2 \quad (5.6)$$

com

$$\alpha(\omega) = \frac{k - \omega^2 m}{(k - \omega^2 m)^2 + d^2} - i \frac{d}{(k - \omega^2 m)^2 + d^2} = \text{Re}[\alpha(\omega)] + i \text{Im}[\alpha(\omega)] \quad (5.7)$$

Neste caso a circunferência passa através da origem dos eixos real e imaginário e a frequência natural corresponde ao ponto menor onde a circunferência atravessa o eixo imaginário, ( $\text{Im}[\alpha(\omega)] = -1/d$ ). Devido às propriedades geométricas deste gráfico, os pontos de intensidade média ( $\omega_1$  e  $\omega_2$ ), correspondem aos pontos onde a circunferência é interceptada pela paralela diametral ao eixo real determinando-se, a partir desta observação, se as propriedades dinâmicas do sistema.

Para um número limitado de frequências, resultantes de um conjunto de resultados experimentais, a resposta total do conjunto pode ser identificada através duma análise de resíduos. O método de aproximação por circunferências, parte do princípio que a contribuição dos modos na vizinhança de uma frequência de ressonância  $\omega_r$  é uma constante. Assim a expressão da receptância toma a forma:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r \bar{A}_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} + {}_r \bar{D}_{jk} \quad (5.8)$$

em que  ${}_r\bar{D}_{jk}$  é uma constante complexa associada com o modo  $r$ . O gráfico de Nyquist associado a  $\omega_r$  é o círculo  $1/(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2)$ , tal como representado na figura 5.5. A constante  ${}_r\bar{A}_{jk}$  significa uma redução, ou amplificação ou rotação da circunferência e  ${}_r\bar{D}_{jk}$  corresponde a uma constante complexa de translação, que representa a contribuição dos restantes modos, designando-se normalmente como resíduo.

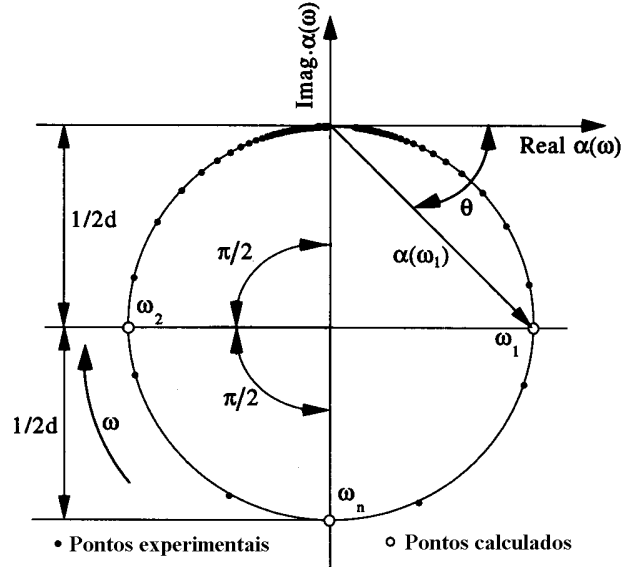


Figura 5.4 Gráfico Nyquist da receptância para um sistema SGDL com amortecimento histerético

A circunferência completa do gráfico de Nyquist nem sempre assenta perfeitamente sobre cada frequência natural, mas a equação (5.8) apresenta resultados com uma boa aproximação. A constante  ${}_r\bar{A}_{jk}$  designada constante modal é construída a partir do modo de vibração  $\phi_r$

$${}_r\bar{A}_{jk} = {}_rA_{jk} e^{i_r\phi_{jk}} \quad (5.9)$$

A constante modal é uma grandeza complexa que pode ser decomposta na amplitude e fase, que são constantes para um dado  $r, j$  e  $k$ :

$${}_rA_{jk} = |\phi_{jr}\phi_{kr}| \quad (5.10)$$

e

$${}_r\phi_{jk} = \arg(\phi_{jr}\phi_{kr}) \quad (5.11)$$

Como a matriz de receptância é simétrica, conclui-se pelo princípio da reciprocidade que:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \alpha_{kj}(\omega) = \frac{\bar{X}_k}{F_j} \quad (5.12)$$

estando as constantes modais interrelacionadas através das relações:

$$\begin{cases} {}_r\bar{A}_{jk} = \phi_{jr}\phi_{kr} \\ {}_r\bar{A}_{jj} = \phi_{jr}^2 \therefore \text{ou} \therefore {}_r\bar{A}_{kk} = \phi_{kr}^2 \end{cases} \quad (5.13)$$

conhecidas como equações de consistência das constantes modais. Através das equações (5.12) e (5.13) e conhecendo uma linha ou coluna completa da matriz  $\alpha(\omega)$ , determina-se toda a matriz (Maia, 1998:67).

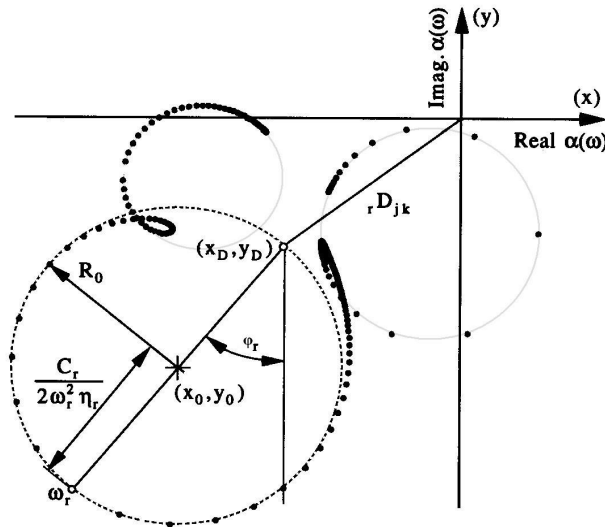


Figura 5.5 Gráfico Nyquist da receptância mostrando a adaptação de um círculo num sistema SGDL

Admitindo uma estrutura onde foram medidas todas as coordenadas envolvidas, geralmente em número significativo e portanto diferente dos modos abrangidos pela gama de frequências em estudo, define-se uma matriz de receptância  $\alpha$ . Esta matriz relaciona o vector de forças generalizadas aplicado à estrutura  $\mathbf{p}$  e o vector de deslocamentos generalizados  $\mathbf{x}$  que traduz a resposta da estrutura nas coordenadas, isto é:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} \quad (5.14)$$

o que expandindo tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dots \\ x_j \\ x_k \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \alpha_{jj} & \alpha_{jk} & \dots \\ \dots & \alpha_{kj} & \alpha_{kk} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ p_j \\ p_k \\ \dots \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

utilizando a relação descrita pela equação (5.12),

$$\alpha_{jk} = \alpha_{kj} \quad (5.16)$$

Para sistemas lineares, a matriz  $\boldsymbol{\alpha}$  é simétrica assim como, todas as outras matrizes que permitem calcular a resposta de um sistema com as solicitações a que este está sujeito. Estas matrizes são geralmente designadas por matrizes de mobilidade – aceleração dado que a resposta é descrita em termos de acelerações, ou apenas por mobilidade se se consideram as velocidades e receptância quando a resposta é descrita pelos deslocamentos.

As funções de transferência obtidas nos ensaios experimentais são, naturalmente, dependentes das coordenadas escolhidas para excitar e medir a resposta da estrutura. Como tal, apenas em conjunto caracterizam a estrutura como um todo. A identificação destas curvas permite obter os chamados parâmetros modais, que se podem dividir em dois tipos: globais e locais. Os parâmetros globais, como as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento, correspondentes aos valores próprios da equação característica do sistema, são propriedades da estrutura e, conseqüentemente, independentes das coordenadas em que se realizam as medições. Pelo contrário, os parâmetros locais que caracterizam a forma dos modos de vibração correspondem aos vectores próprios do sistema e estão intimamente relacionados com as coordenadas utilizadas. Quer num caso, quer no outro, a existência de constantes modais complexas dificulta o processo de identificação. É vantajoso que exista a possibilidade de determinação visual do número de modos na gama de frequências em estudo para que se consiga um modelo adequado do comportamento dinâmico da estrutura.

A partir de qualquer conjunto de funções de transferência obtido para uma dada gama de frequências e obtidas em diferentes coordenadas da estrutura, podem-se obter os respectivos diagramas de Bode e Nyquist como os representados nas figuras 5.2 e 5.5. Para

cada modo, as amplitudes variam de curva para curva. Como a cada modo está associada uma frequência natural e um factor de amortecimento, que são parâmetros globais, as diferenças nas curvas obtidas devem-se aos diferentes valores das constantes modais, amplitude e fase que são parâmetros locais. Estas constantes modais são assim responsáveis, em muitas situações, pela difícil distinção no diagrama de Nyquist de alguns dos modos da estrutura, especialmente nos casos de modos de vibração associados a frequências próximas. Se as curvas obtidas forem poucas, torna-se difícil decidir se existe algum modo particular. Além disso, se o modo em questão for complexo, isto é, fase da constante modal diferente de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ , a verificação no gráfico de Nyquist pode ser insuficiente para clarificar a questão.

Deve-se então utilizar uma função, baseada nas funções de transferência medidas, independente dos valores das constantes modais, isto é, da amplitude e fase. As amplitudes de ressonância para cada modo nas várias curvas são idênticas. Nestas condições é mais fácil detectar o número de modos de vibração existentes e a complexidade dos modos desaparece no gráfico de Nyquist, onde os círculos são todos centrados no eixo imaginário.

## 5.2 Técnicas de Medida

O principal objectivo na utilização das técnicas de medida, aqui envolvidas, é permitir obter directamente as FRF da estrutura a testar. Há três aspectos do processo de medição aos quais importa prestar mais atenção, com o objectivo de assegurar que a aquisição dos resultados seja da mais alta qualidade:

- A forma mais adequada de suportar mecanicamente a peça e de aplicar a excitação;
- A transposição dos resultados medidos, nomeadamente a força de excitação e o movimento de resposta;
- O processamento de sinal e a sua adequação ao tipo de teste utilizado.

A função resposta em frequência é a razão entre a resposta dinâmica da estrutura e a força de excitação aplicada. Esta resposta pode ser descrita em termos de deslocamento, velocidade ou aceleração. No domínio de frequência, os picos desta função ocorrem nas frequências de ressonância do sistema.

Numa estrutura real, em serviço, as forças dinâmicas aplicadas introduzem vibrações que são normalmente do tipo aleatório. Para permitir a sua representação no domínio da frequência, são definidos dois parâmetros para descrever o sinal aleatório: a função de auto-correlação (ACF); e, a densidade espectral de potência (PSD). Para um sinal aleatório, estacionário e ergódico,  $f(t)$ , ao longo do eixo tempo, pode-se calcular o valor do produto  $f(t) f(t+\tau)$  e obter a chamada função de auto-correlação (Maia, 1998:23-29):

$$R_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) f(t+\tau) dt \quad (5.17)$$

em que  $f(t+\tau)$  representa o valor da função  $f(t)$  observada depois dum intervalo de tempo  $\tau$ . A função descrita pela equação (5.17) é real e dependente do tempo, por isso pode-se calcular a transformada de Fourier que descreve a densidade espectral de potência (PSD), ou seja:

$$S_{ff}(\omega) = F[R_{ff}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (5.18)$$

Esta função é também real mas depende da frequência. Utilizando as relações de Weiner-Khintchine escrevem-se as duas equações (5.17) e (5.18) na seguinte forma:

$$S_{ff}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (5.19)$$

$$R_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (5.20)$$

a partir das quais se definem as funções de correlação cruzada e densidade espectral cruzada:

$$S_{fx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{fx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (5.21)$$

$$R_{fx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) x(t+\tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{fx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (5.22)$$

$$S_{xf}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xf}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (5.23)$$

$$R_{xf}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) f(t+\tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xf}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (5.24)$$

Ficam assim definidos os parâmetros necessários para descrever um processo aleatório, o que permite relacionar solicitações e respostas em sistemas sujeitos a vibrações aleatórias.

Partindo do conhecimento da função de auto-correlação, podem-se, a partir de  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{x}(t+\tau)$ , obter as funções de auto-correlação  $R_{xx}$  e PSD  $S_{xx}(\omega)$ , de resposta.

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t+\tau) dt \quad (5.25)$$

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (5.26)$$

Sabendo que a FRF que caracteriza as propriedades dinâmicas de um sistema  $\mathbf{H}(\omega)$  é definida pela relação entre a saída  $\mathbf{x}(t)$  e a entrada  $\mathbf{f}(t)$ , tem-se,

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{x}(t)}{\mathbf{f}(t)} \quad (5.27)$$

Podem-se, então, demonstrar as seguintes relações:

$$S_{xx}(\omega) = [\mathbf{H}(\omega)]^2 S_{ff}(\omega) \quad (5.28)$$

$$S_{fx}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) S_{ff}(\omega) \quad (5.29)$$

$$S_{xx}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) S_{xf}(\omega) \quad (5.30)$$

que relacionam a excitação com a resposta através da equação (5.28) em termos da PSD e das equações (5.29) e (5.30) em termos das funções de correlação cruzada. Estas expressões possibilitam assim o cálculo das características da resposta estacionária aleatória, desde que seja conhecida a FRF do sistema.

Para a realização dos ensaios que estão envolvidos neste trabalho, que são descritos nos capítulos que se seguem recorre-se a um analisador espectral que utiliza a densidade espectral de potência e a densidade espectral cruzada para calcular a função FRF. Este analisador espectral tem três estimadores para calcular FRF (Brüel&Kjæl, 1992):

$$\mathbf{H}_1(\omega) = S_{fx}(\omega) / S_{ff}(\omega) \quad (5.31)$$

$$\mathbf{H}_2(\omega) = S_{xx}(\omega) / S_{xf}(\omega) \quad (5.32)$$

$$\mathbf{H}_3(\omega) = \sqrt{\mathbf{H}_1(\omega) \mathbf{H}_2(\omega)} \quad (5.33)$$

Há muitas situações, em que as medições são imperfeitas, isto é, aparece ruído nos sinais de entrada e/ou de saída, ruído que vai poluir os espectros medidos. Na vizinhança das ressonâncias, o sinal da força,  $S_{ff}$ , é normalmente, mais sensível a este fenómeno, por ser muito fraco, enquanto que na vizinhança da anti-ressonância é o sinal da resposta o mais afectado, por razões idênticas. Então, o estimador  $H_1$  é o melhor na vizinhança da anti-ressonância, enquanto que o estimador  $H_2$  é o melhor na vizinhança da ressonância. Como se pode ver nas equações (5.31), (5.32) e (5.33) que no cálculo do estimador  $H_2$  não intervém  $S_{ff}$ , ao contrario do que acontece no estimador  $H_1$ . No cálculo das funções FRF, quando o sinal de entrada não é afectado por ruído, é preferível utilizar o estimador  $H_2$  em vez de  $H_1$ , como acontece, por exemplo, no caso das frequências de ressonância de um sistema mecânico excitado por um excitador de vibração. Uma vez escolhido o melhor estimador a utilizar,  $H_2$ , procede-se à realização dos ensaios experimentais sobre as várias peças fabricadas. No entanto antes da descrição dos ensaios importa apresentar uma descrição sumária sobre os principais métodos de extracção dos parâmetros modais.

### 5.3 Métodos de Extracção dos Parâmetros. A Identificação Modal

A análise modal experimental baseia-se na medida de parâmetros de vibração que se podem englobar na designação geral de testes modais e que têm como principal objectivo a determinação experimental de frequências naturais, modos de vibração e razões de amortecimento. Pretendem-se adquirir conjuntos de FRF suficientemente precisos e completos, tanto em valores de frequência como nos domínios do espaço, para possibilitar a análise e extracção das propriedades dinâmicas da estrutura para todos os seus modos de vibração. As FRF obtidas são as respostas de vibração em várias coordenadas previamente



escolhidas da estrutura. Estas são normalmente descritas em termos de acelerações, mas podem também ser velocidades ou deslocamentos, resultantes de excitações de vibração, geralmente aplicadas numa determinada coordenada sob a forma de forças motrizes. (Braun, S., 2002:813-820).

A resposta dos sistemas tal como é obtida directamente dos ensaios experimentais, tem de ser processada antes de ser utilizada nas aplicações envolvidas na análise modal. É necessário construir um modelo modal que inclua os parâmetros modais, concretamente as frequências naturais as razões de amortecimento, e modos de vibração. Estes são característicos da estrutura com seus constrangimentos de limite e estão relacionados com os pólos da função de transferência. Por sua vez as constantes modais, amplitudes e fases que dão origem aos modos de vibração, ou vice-versa, dependem dos locais onde as respostas e forças são aplicadas.

Conforme o tipo de abordagem, existem fundamentalmente dois tipos de métodos para identificar as propriedades dinâmicas da estrutura. Os métodos indirectos, que estimam os parâmetros modais, a partir das respostas medidas e permitem a construção do modelo modal. E os métodos directos que avaliam directamente as matrizes do modelo de resposta para o modelo espacial, isto é, as matrizes do sistema de massa, rigidez, e amortecimento, sem calcular os parâmetros modais. Destes últimos, evidenciam-se os métodos espectrais (Klosterman, A., 1971), ISSPA (Link, M., Volland, A. 1978: 165-174), multi-matriz (Leuridan, J. M., Kundrat, J. A. 1982: 192-200) e o SFD (Coppolino, R. N., Stroud, R. C. 1986:674-681). O que se pretende fazer é a identificação, a partir das medidas das matrizes do sistema, em termos de amplitudes partindo da equação de equilíbrio MGD (Leuridan, J. 1984):

$$\left[ -\omega_n^2 \mathbf{M} + i\omega_n \mathbf{C} + \mathbf{K} \right] \bar{\mathbf{y}}_n = \mathbf{p}, \quad (5.34)$$

Se for envolvido um número elevado de frequências, respostas e cargas ( $n=1$  a  $N$ ), é possível obter estimativas para as matrizes  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$ .

Ambos os grupos de métodos, directos e indirectos, têm por objectivo a extracção de parâmetros e designam-se de identificação modal, pois permitem a identificação das propriedades dinâmicas a partir das medidas feitas numa estrutura ou componente reais. Podem-se ainda classificar os métodos quanto ao número de entradas e saídas envolvidas.

Quando se analisam as FRF individualmente os métodos são chamados SISO, isto é, entrada-única-saída-única. Se foram simultaneamente processadas várias FRF, mas sempre com a excitação no mesmo ponto, os métodos são chamados SIMO, isto é, entrada-única-saída-múltipla. Os métodos designados por MIMO, que significa entrada-múltipla-saída-múltipla, usam a excitação em locais diversos e as medidas são obtidas em locais diferentes da estrutura (Maia, 1998:186-189).

Os métodos indirectos começaram inicialmente por ser baseados em sistemas com um único-grau-de-liberdade (SGDL), devido às grandes limitações em capacidade dos computadores da altura. No entanto permitiam com muita mais facilidade ser interpretados fisicamente. Com a evolução do poder de cálculo e baseados nos princípios dos sistemas SGDL os métodos evoluíram e são aplicados a múltiplos-graus-de-liberdade (MGDL). O método mais simples e intuitivo de todos é o que utiliza a observação directa da amplitude no gráfico de Bode das FRF, onde as frequências naturais são obtidas nos picos da amplitude da resposta. Através deste mesmo gráfico podem-se avaliar as razões de amortecimento e os modos de vibração, os primeiros pela forma mais ou menos pronunciada dos picos e os segundos pelas razões das amplitudes dos picos em vários pontos ao longo da estrutura. Isto deve-se ao facto de tanto as frequências naturais como as razões de amortecimento terem, em média, o mesmo valor em cada modo, nos vários gráficos FRFs uma vez que são propriedades globais da estrutura. Hoje em dia, este método tem mais interesse na interpretação dos resultados obtidos por outros processos, quando estes são mais difíceis de compreender, uma vez que assenta fundamentalmente na interpretação física do comportamento dinâmico das estruturas e no modo como os vários valores são representados graficamente.

Mas foi a partir da interpretação física das respostas dinâmicas de estruturas que Kennedy e Pancu (Kennedy, C. C., Pancu, C. D. P. 1947: 603-625) perceberam que a representação da parte real da receptância em relação à parte imaginária traduzida no diagrama Nyquist, pode ser usada para identificar os parâmetros modais associados a cada ressonância de uma estrutura. A resposta centrada na frequência natural é ampliada e os dados posicionam-se teoricamente ao longo de uma curva particular, uma circunferência neste caso, como se pode ver nas figuras 5.4 e 5.5, analisadas tendo em conta a equação (5.8). A frequência natural situa-se aproximadamente onde o comprimento do arco entre dois pontos é máximo, ou seja, no ponto onde a razão de mudança do comprimento de arco

com frequência atingiu um máximo. A razão de amortecimento é avaliada, como já foi visto, pelos pontos de média potência, e os modos de vibração estimados pelas razões dos diâmetros das circunferências correspondentes de cada modo, para várias respostas de saída. Este método, melhorado ao longo dos tempos, designa-se de ajuste de circunferência (Circle-Fitting method) e pode ser considerado como o primeiro que permite estabelecer um modelo matemático e através de técnicas numéricas que quantificam a avaliação física na identificação modal.

Entretanto foi desenvolvido outro método, no campo de métodos de SGDL, que é o inverso do anterior, já que a identificação se baseia no inverso do primeiro termo da equação (5.8), e por isso designado método Inverso. A representação gráfica das partes reais e imaginárias daquele termo em relação ao quadrado da frequência dá origem a linhas rectas que são mais fáceis de ajustar que os círculos, especialmente para sistemas com modos bem separados em que este método é mais vantajoso e mais rápido. No caso de modos próximos é necessário um procedimento iterativo baseado na seguinte metodologia: primeiro faz-se uma identificação inicial de cada um dos modos individualmente e depois é repetida a análise para cada modo, subtraindo dos dados FRF originais a contribuição dos modos adjacentes e que já foram identificados. Ou seja:

$$\bar{\alpha}_r = \bar{\alpha} - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^N \alpha_s \quad (5.35)$$

com  $\bar{\alpha}$  representando o primeiro valor da FRF,  $\bar{\alpha}_s$  é a contribuição da FRF regenerada de cada modo já analisado e  $\bar{\alpha}_r$  representa no modo em análise a FRF resultante.

No método Inverso é, normalmente, mais fácil de distinguir visualmente modos próximos o que se revela vantajoso em relação ao gráfico de Nyquist, pois neste último dois modos muito próximos podem parecer ser uma única circunferência, enquanto na representação inversa pode-se observar melhor através do ligeiro afastamento das linhas rectas. No entanto, o método Inverso apresenta dois problemas que são: a sua quase insensibilidade à forma como os dados são extraídos na frequência natural em causa; a possibilidade que a linha recta incorpore pontos desviados da ressonância. No entanto outro problema que fica resolvido com o método Inverso é o da existência de alguns modos levemente amortecidos e da existência de um número de pontos envolvidos reduzido, em que é difícil um ajuste da circunferência. No ajuste de linha esse problema

tende a desaparecer. Mas quando os dados da FRF contêm os efeitos de mais que um modo simples, como acontece frequentemente, existe uma maior dificuldade em seleccionar os pontos contribuintes para cada modo. Então foram desenvolvidos alguns métodos de SGDL para terem automaticamente em conta a contribuição de modos vizinhos ao longo do processo de identificação, como é caso do método de Dobson (Dobson, B. J. 1987: 29-40) e da Função de Resposta Característica (CRF) (Maia, N. M. M., Ribeiro, A. M. R., Silva, J. M. M., 1994: 191-202).

Analisando da equação (5.8) verifica-se que, pelo menos para modos com frequências naturais não demasiado próximas e com valores das constantes modais da mesma ordem de grandeza, a contribuição de cada modo na vizinhança da respectiva ressonância é mais importante que a contribuição total de todos os outros modos. Na vizinhança de um determinado modo, para além de ser dominante a contribuição deste modo para a receptância, verifica-se ainda que esta mesma contribuição tende a variar de uma forma muito mais intensa que as contribuições dos outros modos, ou seja, a contribuição de um modo para a receptância apresenta uma variação no valor da amplitude e da fase muito mais brusca junto à ressonância respectiva do que nas restantes zonas do espectro. Então, pode-se considerar que a contribuição de todos os outros modos da estrutura, na vizinhança de cada modo *ré* descrita por uma constante, dita “residual”, pois traduz-se numa diferença entre o valor da receptância para determinada frequência e a contribuição para a mesma do modo dominante. No caso de modos com frequências naturais muito próximas, a contribuição dos modos vizinhos pode ser melhor aproximada por um termo dependente da frequência. No entanto, o problema também pode ser contornado se for subtraído o efeito dos modos já identificados, um procedimento usual em processos de identificação modo-a-modo (Cafeo, J. A., Trethewey, 1992).

Partindo da equação (5.8), omitindo os índices, por uma questão de simplicidade, a diferença das respostas  $\alpha_a$  e  $\alpha_b$  para duas frequências próximas  $\omega_a$  e  $\omega_b$  é,

$$\alpha_a - \alpha_b = A \left( \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{(\omega_r^2 - \omega_a^2 + j\eta_r \omega_r^2)(\omega_r^2 - \omega_b^2 + j\eta_r \omega_r^2)} \right) \quad (5.36)$$

Pode observar-se que a resposta resultante já é independente do efeito dos outros modos que não o dominante.

Utilizando um terceiro ponto  $\omega_c$ , também próximo dos anteriores, com a resposta  $\alpha_c$ , calcula-se  $\alpha_b - \alpha_c$  e o quociente:

$$\frac{\alpha_a - \alpha_b}{\alpha_b - \alpha_c} = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_b^2 - \omega_c^2} \frac{\omega_r^2 - \omega_c^2 + j\eta_r \omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega_a^2 + j\eta_r \omega_r^2} \quad (5.37)$$

A equação (5.37) é baseada nas respostas em três pontos próximos, sendo independente do termo residual representativo da influência dos outros modos assim como da constante modal que corresponde aos parâmetros locais. A equação (5.37) é apenas função das variáveis globais,  $\omega_r$  e  $\eta_r$ .

Defina-se agora uma variável  $\gamma$  tal que para o ponto  $a$

$$\gamma_a = \frac{\alpha_b - \alpha_a}{\alpha_c - \alpha_b} \frac{\omega_c^2 - \omega_b^2}{\omega_b^2 - \omega_a^2} \quad (5.38)$$

ou,

$$\gamma_a = \frac{\omega_r^2 - \omega_c^2 + j\eta_r \omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega_a^2 + j\eta_r \omega_r^2} \quad (5.39)$$

o que rearranjando é escrito como

$$\gamma_a = 1 - \frac{\omega_c^2 - \omega_a^2}{\omega_r^2 - \omega_a^2 + j\eta_r \omega_r^2} \quad (5.40)$$

Defina-se agora nova função  $\beta$  tal que, no ponto  $a$ :

$$\beta_a = \frac{1 - \gamma_a}{\omega_c^2 - \omega_a^2} \quad (5.41)$$

substituindo  $\gamma_a$ , obtém-se a expressão:

$$\beta_a = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega_a^2 + j\eta_r \omega_r^2} \quad (5.42)$$

onde se pode observar a semelhança em relação ao termo modal da receptância, com constante modal unitária. Na vizinhança de cada modo, esta função depende apenas das

frequências naturais e dos factores de amortecimento e é designada de Função de Resposta Característica (FRC) (Maia, N. M. M., Ribeiro, A. M. R., Silva, J. M. M., 1994, pg 191-202), pois depende apenas dos parâmetros globais, característicos da estrutura, e não das constantes modais complexas, locais, que dependem das coordenadas escolhidas para a realização dos ensaios.

Uma característica essencial da FRC é que pode ser calculada a partir das curvas de receptância particulares, isto é, dos resultados experimentais, obtidos a partir de ensaios em estruturas reais. Os valores numéricos da FRC obtêm-se também por

$$\beta_a = \frac{1 - \frac{(\alpha_b - \alpha_a)(\omega_c^2 - \omega_b^2)}{(\alpha_c - \alpha_b)(\omega_b^2 - \omega_a^2)}}{\omega_c^2 - \omega_a^2} \quad (5.43)$$

Tomando sucessivos conjuntos de três pontos genéricos das curvas de receptância  $a$ ,  $b$  e  $c$ , é possível construir uma função  $\beta(\omega)$  que é independente das constantes modais e é válida apenas para a vizinhança de cada modo. Nas zonas de transição entre os modos observa-se uma dispersão característica, consequência da falta de validade da expressão. Assim, esta dispersão ajuda a localizar visualmente os modos pela simples observação da função assim construída.

Cada valor da FRC obtêm-se a partir das receptâncias em três pontos vizinhos de qualquer curva de resposta. Calculam-se tantos valores da FRC para cada frequência quantas as curvas de receptância disponíveis. Assim a FRC apresenta a forma da receptância de um sistema com um grau de liberdade, como se pode observar na equação (5.42). Nestas condições, a FRC pode ser utilizada para identificar os parâmetros globais da estrutura através de qualquer dos algoritmos disponíveis, nomeadamente aqueles que permitem a identificação modo-a-modo no domínio da frequência. Note-se que, dado que o numerador da equação (5.42) é unitário, o método da inversa pode ser aplicado

$$\frac{1}{\beta} = \omega_r^2 - \omega_a^2 + j\eta_r \omega_r^2 \quad (5.44)$$

A parte Real é uma recta em  $\omega^2$  com declive unitário negativo e a parte Imaginária é uma constante que depende do valor do factor de amortecimento e da frequência natural.

Estas características garantem robustez e versatilidade na sua aplicação como um processo de identificação. Dado ser assumida a dominância do modo em estudo, esta função apenas faz sentido quando tal se verifica, isto é, numa vizinhança da ressonância cuja dimensão depende da influência dos modos vizinhos. De facto, os primeiros sinais da existência de um modo no gráfico da FRC é a coincidência dos valores obtidos a partir das diversas curvas e a dispersão dos pontos correspondentes às gamas em que não se verifica a dominância de nenhum modo. Fora das vizinhanças dos modos, a FRC não faz sequer sentido, pois que nessas vizinhanças não depende dos valores das constantes modais, mas apenas dos parâmetros globais. Num sistema MGDL os parâmetros globais são os mesmos para todas as curvas medidas, devendo ser coincidentes as curvas que representam a FRC calculadas a partir das diferentes curvas de receptância. Como a equação (5.44) só depende das frequências naturais e razões de amortecimento pode-se concluir que é uma característica da estrutura e pode realizar-se facilmente a identificação pelo procedimento inverso, dado que o numerador da equação é unitário (Maia, N. M. M., Silva, J. M. M., Ribeiro, A. M. R., 1995: 366-374).

O método de CRF parte de três pontos genéricos próximos da frequência em análise em que, por subtracção, se elimina a constante modal residual da equação (5.8) tendo em conta as diferenças entre a receptância a diferentes frequências. Na figura 5.6 representam-se dois diagramas mostrando a distribuição dos pontos e uma aproximação da função  $1/\beta$  aplicada ao modelo da figura 5.1. Na parte superior da figura mostra-se a representação do termo real e na parte inferior o imaginário. Observam-se com clareza as nuvens de pontos e a sobreposição das linhas tanto de declive negativo como horizontal respeitantes respectivamente à parte real e imaginária da função.

Na vizinhança de cada frequência de ressonância  $\omega_r$ , a FRC representa o comportamento de um sistema com um grau de liberdade, a equação (5.42) é escrita sob a forma de uma função  $\beta(\omega^2)$ :

$$\beta(\omega^2) = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} \quad (5.45)$$

Através da aplicação do método da inversa o que permite calcular os parâmetros modais, fazendo:

$$\frac{1}{\beta(\omega^2)} = \omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2 \quad (5.46)$$

Representando graficamente esta função, obtêm-se rectas quer para a parte real, quer para a imaginária do tipo:

$$\Re\left(\frac{1}{\beta(\omega^2)}\right) = \omega_r^2 - \omega^2 \quad (5.47)$$

$$\Im\left(\frac{1}{\beta(\omega^2)}\right) = \eta_r \omega_r^2 \quad (5.48)$$

Derivando em ordem às frequências obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial \omega^2} \Re\left(\frac{1}{\beta(\omega^2)}\right) = -1 \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega^2} \Im\left(\frac{1}{\beta(\omega^2)}\right) = 0 \quad (5.50)$$

Na vizinhança de cada modo, esta representação gráfica apresenta na parte real um troço de recta com declive unitário decrescente que cruza o eixo das abcissas para  $\omega^2 = \omega_r^2$  e na parte imaginária apresenta outro troço de recta agora horizontal com ordenada igual ao produto  $\eta_r \omega_r^2$ . Nestas condições, estes troços de recta permitem calcular facilmente a frequência de ressonância e o factor de amortecimento hysterético do modo em causa. Note-se que a existência destes troços de recta permite também evidenciar a existência dos modos, já que, fora da vizinhança das ressonâncias, tais troços não se evidenciam, como se pode ver na figura 5.6.

Quanto às constantes modais complexas, retomando a equação (5.36) na forma:

$$A = \frac{(\alpha_a - \alpha_b)(\omega_r^2 - \omega_a^2 + j\eta_r \omega_r^2)(\omega_r^2 - \omega_b^2 + j\eta_r \omega_r^2)}{\omega_a^2 - \omega_b^2} \quad (5.51)$$



Como os parâmetros globais já são conhecidos, para cada par de pontos  $(\omega_a, \alpha_a)$  e  $(\omega_b, \alpha_b)$ , obtém-se o valor complexo da constante modal do modo  $r$ ; na vizinhança de cada modo. Todos os pares de pontos conduzem ao mesmo resultado, pelo que a média entre os vários valores assim obtidos conduz a uma estimativa razoável do valor pretendido.

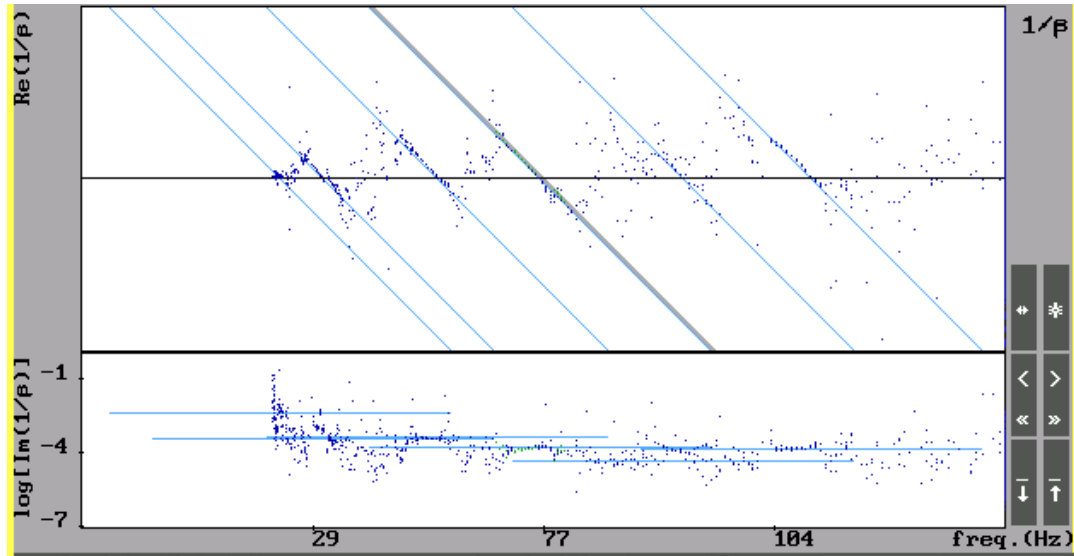


Figura 5.6 Diagrama de visualização da função  $1/\beta$  aplicada ao modelo representado na figura 5.1

Obtidas as características dinâmicas de uma estrutura é agora possível obter um modelo genérico parametrizado que é definido numericamente ou analiticamente e que representa a estrutura em estudo. Utilizando os ensaios consegue-se, assim, calcular o modelo do comportamento da estrutura sem ser necessária a sua descrição geométrica, o que facilita a análise de estruturas complexas, desde que seja possível a obtenção de dados experimentais fiáveis. Podem-se construir modelos mais precisos e adequados do ponto de vista de estudo dinâmico, com menor esforço computacional, dispensando uma descrição geométrica complexa da estrutura ou as simplificações normalmente assumidas na via analítica. A principal dificuldade reside na necessidade da existência prévia de uma estrutura que possa ser ensaiada, o que impossibilita a sua aplicação no dimensionamento de estruturas em fase de projecto.

## 5.5 Sumário e Discussão de Resultados

Foram descritas as principais metodologias utilizadas na análise modal experimental e suas técnicas. A função de resposta em frequência tem um papel fundamental neste processo principalmente como um meio para a obtenção das características dinâmicas das estruturas. Como a amortização é difícil de determinar numericamente, foi decidido não a considerar, convertendo, por aproximação, os modos complexos experimentais em modos reais, uma vez que as estruturas a analisar são apenas levemente amortecidas.

Foram abordadas as principais técnicas utilizadas na análise espectral e escolhido o melhor estimador ( $H_2$ ) para as aplicações envolvidas neste trabalho. Obtidas as FRF é necessário determinar os modos de vibração e as frequências naturais, processo designado de identificação modal. Foram abordadas as diferentes técnicas disponíveis, incluindo os métodos directos e indirectos. Os métodos directos estão limitados, uma vez que avaliam directamente as matrizes características dos sistemas sem calcular os parâmetros associados. As limitações destes processos situam-se principalmente a nível da complexidade do problema e da possibilidade de conduzirem a incoerências físicas dos resultados de melhoramento modal.

Os métodos indirectos, normalmente iterativos, já permitem englobar um número significativo de GDLs, apenas limitado pelas técnicas experimentais. Dos métodos indirectos destacam-se os métodos inversos como o CFR que, utilizando a inversa da função de resposta, permitem uma visualização mais rigorosa, através de rectas, dos modos de vibração que se apresentem próximos. Pode-se concluir que, dos vários métodos de identificação, os mais simples correspondem normalmente a uma análise mais demorada, interactiva mas com boa visibilidade e fácil interpretação física, enquanto que os mais sofisticados são mais rápidos, dando resultados mais imediatos, mas perdem muito em flexibilidade e percepção física dos seus resultados.

## **CAPÍTULO 6 – ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL**

Foram apresentadas e demonstradas nos capítulos anteriores as metodologias propostas para realizar o melhoramento de estruturas. Neste capítulo são analisados dinamicamente protótipos de estruturas construídos para serem submetidos a testes experimentais. Estes são constituídos por montagem de componentes estruturais que envolvem ligações mecânicas sendo a sua geometria escolhida de forma que cada elemento do conjunto possua características dinâmicas diferentes. Paralelamente são criados modelos de elementos finitos dos protótipos físicos, para que as suas frequências naturais e modos de vibração possam ser comparados e aplicadas as metodologias de melhoramento desenvolvidas. Assume-se que nas estruturas os seus parâmetros não variam no tempo, obedecem ao princípio da reciprocidade de Maxwell e são sempre observáveis os valores medidos de entrada ou de saída, contendo dimensão suficiente para ser possível desenvolver modelos das estruturas.

### **6.1 Introdução**

A escolha de exemplos ilustrativos que permitam a caracterização do desempenho dos elementos utilizados no método dos elementos finitos, aplicados no estudo de dinâmica de estruturas, bem como a identificação das suas limitações na determinação das suas frequências naturais e modos de vibração, é o principal objectivo deste capítulo. Já que se pretende desenvolver e aplicar metodologias experimentais para a identificação modal dos

protótipos, de forma a ser possível identificar as suas frequências naturais e respectivos modos de vibração, decidiu-se a utilização de protótipos estruturais com geometrias simples e facilmente tratáveis do ponto de vista de aquisição experimental de dados.

As estruturas construídas permitem a montagem de componentes entre si utilizando preferencialmente elementos de ligação por juntas de vários tipos, incluindo soldadura, rebite e aparafusamento. Nesse sentido, é objectivo deste trabalho estudar alguns dos elementos de ligação mais correntes de forma a comparar as diferenças de comportamento das estruturas perante a utilização de tais elementos de ligação.

## **6.2 Escolha do Modelo Experimental e a sua Modelação Numérica**

A escolha correcta da metodologia de execução dos ensaios é fundamental para garantir a qualidade dos resultados que se pretendem obter. O objectivo, nesta fase, é caracterizar experimentalmente as propriedades dinâmicas dos componentes da estrutura, para depois comparar e melhorar os modelos de elementos finitos correspondentes. A própria forma de criar o modelo numérico é feita em função da geometria da peça e da forma como é materializado o ensaio experimental. Só depois são caracterizadas as propriedades dinâmicas influenciadas pelo facto de existir uma ligação entre peças, cuja representação no modelo numérico pode não ser realista ou mesmo a ideal. Efectivamente, não sendo a mesma coisa ligar duas peças por parafusos, rebites ou soldaduras a modelação destas ligações através das metodologias de elementos finitos não são geralmente diferenciadas, a não ser quando são utilizados modelos extremamente detalhados.

Uma preparação cuidada dos testes é fundamental para se tirar o máximo partido dos resultados a obter, dentro das condições possíveis inerentes aos processos e técnicas disponíveis. Há fundamentalmente três aspectos importantes a considerar, que podem influenciar significativamente o progresso e execução dos testes modais numa estrutura:

- 1) Construir um modelo numérico inicial que se adequa melhor às particularidades do teste modal. Esse modelo deve permitir retirar as primeiras ideias sobre a ordem de grandeza das propriedades dinâmicas da estrutura e desta forma responder a algumas perguntas como por exemplo: qual a melhor forma de modelar geometricamente as peças, quais as funções

de forma mais indicadas, qual o número de elementos a utilizar e a sua distribuição, entre outras;

- 2) Uma vez pré definido o modelo numérico, este deve permitir simular as condições de teste, de forma a permitir seleccionar os melhores pontos onde aplicar a excitação e de apoio e escolher os GDL mais indicados para a colocação dos sensores, que permitem obter a resposta dinâmica da estrutura;
- 3) O modelo numérico deve ser concebido de forma a conter informação adaptada aos ensaios e ao processo de melhoramento. Os parâmetros que são modificados pelo programa de melhoramento devem estar acessíveis de acordo com a metodologia desenvolvida. Deve questionar-se se o modelo experimental utilizado é o mais apropriado para a obtenção dos dados necessários para a identificação modal.

Foram concebidos vários modelos numéricos procurando em todos uma forma eficiente de montagem das 3 peças. Aplica-se o princípio construtivo de assegurar a ligação entre as 3 peças com ligações distintas, sem alterar significativamente os conjuntos, ou seja, permitir a sua intercambialidade. O princípio básico de concepção das peças é o mostrado na figura 6.1 e obedece aos seguintes princípios:

1. Estrutura 1: serve de suporte e deve possuir frequências naturais mais elevadas que as restantes estruturas para evitar sobreposição de valores na montagem. Esta estrutura é constituída por uma placa rectangular de 200 x 300 mm, designada por placa principal (PLP), com o primeiro modo de vibração próximo dos 100Hz.
2. Estrutura 2: é mais flexível que a estrutura 1 tendo o primeiro modo de vibração entre 10 e 20 Hz. A estrutura 2 designada placa secundária (PLS) e está ligada ao suporte PLP através de uma peça de ligação. A sua forma foi definida de modo a reduzir as simetrias para dificultar o aparecimento de frequências naturais repetidas. A união com a peça de ligação é feita através das alternativas seguintes:
  - Aparafusada,
  - Rebitada,
  - Soldada;

3. Ligação; é o elemento de união entre as estruturas, designada por ligador (LIG), sendo fixada, por parafusos com a estrutura 1 (PLP) sendo o momento de aperto predefinido. O ligador possui outras zonas para ligação à estrutura 2 (PLS) que permitem a materialização dos 3 processos de ligação previstos.

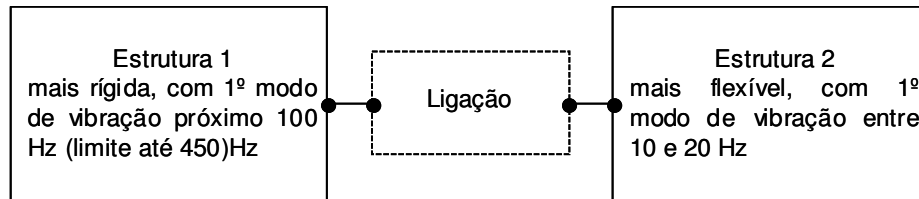


Figura 6.1 Princípio básico de organização do modelo experimental

4. Conjunto (CPLP): é composto pelas peças anteriores devidamente montadas entre si sendo apresentados em 3 variantes conforme o elemento de ligação utilizado. Na figura 6.2 apresenta-se o aspecto geral do conjunto, onde na placa primária (PLP) é usada uma espessura de 1.8 mm e na placa secundária (PLS) uma espessura de 1 mm.

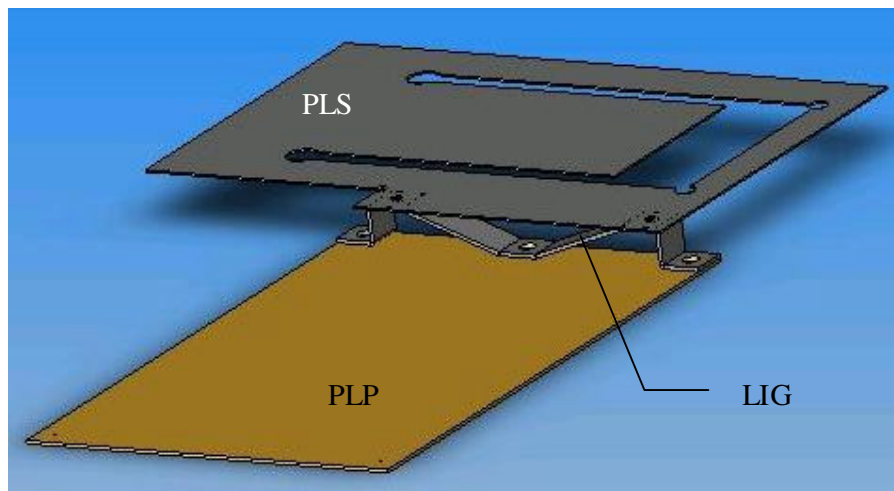


Figura 6.2 Aspecto geral do conjunto de modelos escolhido

O ligador tem a mesma espessura da placa PLP sendo conformado por quinagem. No apêndice I apresentam-se os desenhos dos modelos utilizados neste trabalho. São previstos 3 pontos distintos de ligação à placa primária e 2 pontos de ligação à placa secundária, como também se pode observar na figura 6.2. Nas ligações da placa primária à peça de ligação, pretende-se maior rigidez, pelo que se utilizam parafusos M8, porca e

anilha de pressão. Na ligação da placa secundária utiliza-se um dos vários processos de ligação referidos. Aplica-se o método dos elementos finitos no desenvolvimento dos modelos assim definidos, sem se introduzir qualquer restrição de deslocamento ou carga. Na tabela 6.1 apresentam-se os valores obtidos para as primeiras frequências naturais dos vários componentes da estrutura.

Tabela 6.1 Frequências naturais das subestruturas do protótipo

| Modos | Frequências Naturais dos Modelos em Hz |        |       |           |          |
|-------|--|--------|-------|-----------|----------|
|       | PLS                                    | PLP    | LIG   | LIG + PLP | Conjunto |
| 1     | 13.9                                   | 98.21  | 288.7 | 128       | 16.95    |
| 2     | 33.6                                   | 102.67 | 756.1 | 131.3     | 20.16    |

De notar que existe uma boa separação de valores das frequências naturais, respeitando os princípios estabelecidos.

### 6.2.1 Preparação das Estruturas e Fiabilidade dos Resultados

Além do ensaio de cada um dos modelos individualmente, também são ensaiados os conjuntos já referidos. Em primeiro lugar testam-se as peças isoladas, montando-se depois a placa principal e a peça de ligação, fixada rigidamente sendo este subconjunto designado PLG, testado posteriormente. Finalmente monta-se a placa secundária no subconjunto através de cada um dos processos de ligação anteriormente referidos e testam-se cada um deles para comparação de resultados. A soldadura de chapas finas, como as utilizadas no presente estudo, requer uma boa técnica de execução sendo estas executadas em oficina especializada. Desta forma as peças secundárias são ensaiadas já soldadas às peças de ligação.

Definidos os modelos, planeiam-se dos testes atendendo fundamentalmente a três aspectos: Em primeiro lugar define-se qual o local mais apropriado para apoiar as peças e a forma de as suspender, de maneira a garantir as condições de fronteira correspondentes a serem livres no espaço. A forma particular das estruturas e a simplicidade dos modelos escolhidos facilita esta escolha. Como as placas são planas as suas deformações no seu plano são menos importantes que as deformações transversais, apenas sendo responsáveis pelos modos rígidos. A zona de ligação entre peças apresenta-se como o local mais indicado para a suspensão, pois é um ponto comum a todas e situa-se na região da estrutura onde se situam as alterações da forma de ligação. Outro aspecto que favorece a escolha

destes pontos para a suspensão da estrutura é o facto de se situarem próximo do centro de gravidade do conjunto das peças, o que permite melhorar a independência da suspensão e reduzir o efeito do amortecimento introduzido por essa suspensão. Uma forma de verificar esse nível é através do cálculo do resíduo médio do ponto de accionamento ADPR (average driving point residue), que é dado por (Ewins, D. J., 2000:508-509):

$$ADPR(j) = \sum_r \frac{\phi_{rj}^2}{\omega_r^2} \quad (6.1)$$

em que  $j$  representa o ponto em análise e  $r$  as várias frequências naturais do modelo em causa. Aplicado este critério ao conjunto das peças conclui-se que a forma de suspensão da estrutura deve ser por cabos flexíveis ligados aos pontos escolhidos, de forma a manter as peças estáveis e na posição vertical. Maia (1998:129-131) apresenta uma comparação entre vários processos de suspensão, tidos em conta nesta escolha.

O segundo aspecto a ter em conta é onde e como excitar as peças de forma a que todos os modos envolvidos sejam accionados tentando sempre reduzir a influência dos corpos estranhos ligados à estrutura. Como o objectivo é obter os modos de vibração na direcção perpendicular ao plano das peças, a excitação tem de ser aplicada também nesta direcção. O principal critério de escolha do melhor local de excitação é o que assegura que esse ponto não se localize perto de uma linha nodal. Pode-se utilizar esta propriedade como uma forma característica da estrutura, servindo de base ao critério de escolha para o local de excitação mais correcto (Ewins, D. J., 2000:509-511). O ponto de accionamento óptimo ODP (optimum driving point), que contem a melhor observabilidade acumulada pelos modos considerados na análise, é identificado comparando o produto dos vários valores apresentados pelos  $r$  modos de vibração  $\phi_r$ , ou seja:

$$ODP(j) = \prod_r |\phi_{rj}| \quad (6.2)$$

Segundo este critério os locais de ligação entre as peças voltam a ser os mais indicados para a aplicação da excitação.

Quanto ao método de excitação, o escolhido um excitador electromagnético, pois este é o que melhor permite o controlo do espectro de frequências. É possível aplicar uma excitação aleatória, dentro da gama de frequências escolhida, durante o próprio ensaio



permitindo verificar a qualidade da resposta. É ainda possível, recorrendo a um estroboscópio e excitando cada frequência natural individualmente, confirmar visualmente o comportamento de cada modo de vibração, em caso de dificuldade de identificação.

O terceiro aspecto a ter em conta na execução dos testes é a escolha da quantidade e dos locais mais adequados para a colocação dos sensores, de forma a obter uma imagem visualmente informativa dos modos de vibração resultantes e assegurar uma correlação não ambígua entre os testes e as análises dos modelos de elementos finitos. Mas como as peças a testar são relativamente de pequenas dimensões, é preciso ainda ter em conta a influência da própria massa dos sensores que alteram a distribuição da massa do sistema em análise e consequentemente a qualidade dos resultados obtidos. Estes objectivos são contraditórios, o aumento do número de sensores permite melhorar a quantidade de leituras, possibilitando uma melhor resolução dos resultados e diminui a possibilidade de ocorrência do efeito de modos falsos, enquanto que o consequente acréscimo da massa conduz a uma maior interferência na fiabilidade dos resultados. Uma forma de avaliar a qualidade de um determinado conjunto de GDLs é efectuar o correlacionamento (MAC) entre estes e o correspondente conjunto de modos de vibração do modelo de elementos finitos. A matriz MAC obtida deve ser simétrica e a sua diagonal principal totalmente unitária. Se nesta avaliação surgirem correlações aceitáveis fora da diagonal principal, é possível que existam modos falsos, devendo ser aumentado o número de GDL envolvidos nos testes ou serem escolhidos outros GDL mais representativos.

### **6.2.2 Materialização dos Modelos de Elementos Finitos**

Os modelos de elementos finitos são geralmente gerados a partir de modelos geométricos, desenvolvidos em programas de CAD. No entanto, a geração automática desses modelos nem sempre reproduz fielmente a representação pretendida, perdendo-se parte da informação. A concepção e representação dos corpos utilizada durante a modelação geométrica não é, normalmente, a mais indicada para a selecção de elementos finitos particulares disponíveis nos programas de elementos finitos. Por exemplo há muitos elementos que são representados simbolicamente nos programas de modelação geométrica que não apresentam uma imagem física que seja aceite pelos modelos FEM. Resulta assim que os modelos de elementos finitos depois de gerados têm ainda de ser alterados consideravelmente. Esta é uma das causas para o aparecimento de erros nos resultados dos cálculos FEM, como já foi referido. A solução para este problema passa pela utilização de

uma metodologia mista em que certas partes do modelo são convertidas directamente do CAD para o FEM e outras são executadas directamente no ficheiro de dados usado pelo código de FEM. Para ser possível aplicar a ferramenta de melhoramento desenvolvida neste trabalho os parâmetros representativos dos modelos FEM e os resultados dos cálculos, têm de obedecer ao protocolo definido, apresentado no capítulo 3, o que justifica a necessidade da especificação de uma metodologia de conversão de modelos geométricos em modelos de elementos finitos.

Neste trabalho opta-se por modelar totalmente a geometria das peças no programa de FEM, minimizando assim os problemas de transferência de dados entre programas. Na figura 6.3 representa-se a geometria do conjunto CPLP, já devidamente montado.

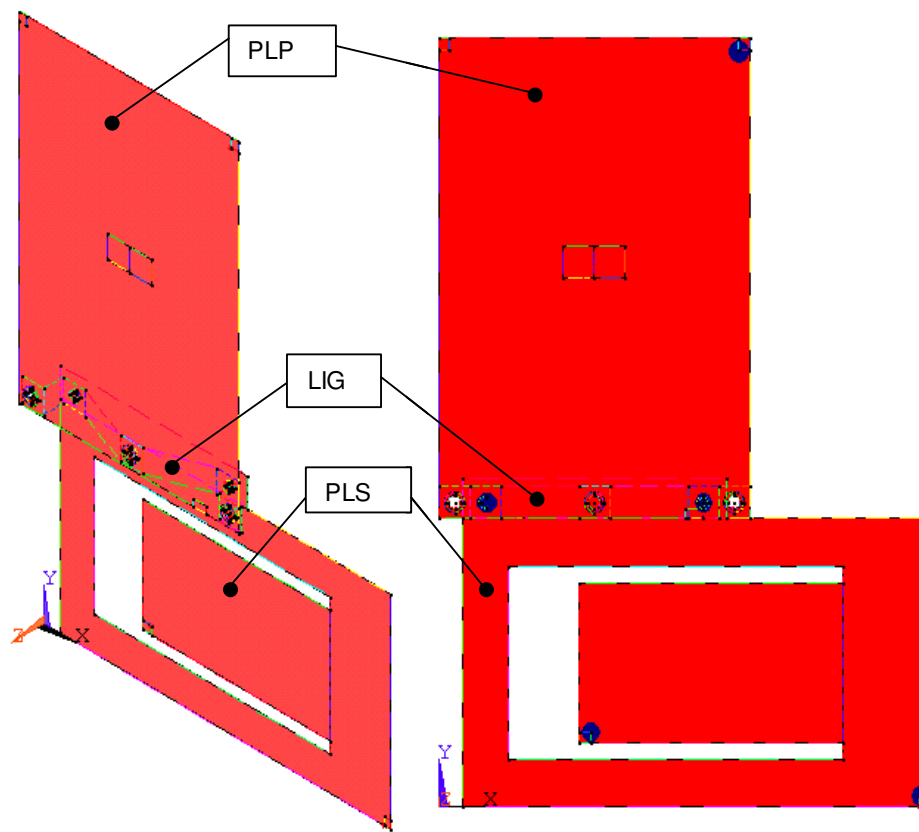


Figura 6.3 Aspecto geral da representação numérica em ANSYS do conjunto de modelos montados, designado CPLP

Na concepção destes modelos, criam-se os pontos, depois as linhas e por fim as áreas, para possibilitar a máxima flexibilidade na escolha dos GDL e assegurar que a

numeração de todos os nós que formam os elementos geométricos, seja controlável durante a atribuição de propriedades e na extracção de resultados. Algumas áreas são obtidas por subtracção ou adição de outras, pelo que o programa, automaticamente as renumera. Procura-se garantir que as áreas resultantes estejam unidas e isso é conseguido, fundamentalmente, através da utilização de linhas comuns. Todas as peças do conjunto são modeladas no mesmo desenho, para que cada uma fique correctamente montada e as ligações estejam garantidamente asseguradas. Para que a modelação das peças seja muito semelhante aos modelos reais, utilizam-se na atribuição das suas características mecânicas os valores obtidos experimentalmente sobre o mesmo material que é utilizado nas peças reais. Os parâmetros obtidos são mostrados na tabela 6.2 apresentando-se no apêndice II os detalhes sobre a sua obtenção.

Tabela 6.2 Principais propriedades utilizadas na modelação numérica das peças

| Parâmetro                             |                  | Valor assumido no modelo    |         |     |
|---------------------------------------|------------------|-----------------------------|---------|-----|
| Descrição                             | Referência ANSYS | PLP                         | LIG     | PLS |
| Módulo de Elasticidade em x           | PREX             | 1,69 x10 <sup>11</sup> Pa   |         |     |
| Módulo de Elasticidade em y           | PREY             | 1,94 x10 <sup>11</sup> Pa   |         |     |
| Módulo de Elasticidade em z           | PREZ             |                             |         |     |
| Coeficiente Poisson em xy             | PRPXY            | 0,329                       |         |     |
| Coeficiente Poisson em yz             | PRPYZ            | 0,353                       |         |     |
| Coeficiente Poisson em xz             | PRPXZ            |                             |         |     |
| Módulo de Elasticidade transversal xy | PRGXY            | 6,9139 x10 <sup>10</sup> Pa |         |     |
| Módulo de Elasticidade transversal yz | PRGYZ            | 7,1693 x10 <sup>10</sup> Pa |         |     |
| Módulo de Elasticidade transversal xz | PRGXZ            | 6,7976 x10 <sup>10</sup> Pa |         |     |
| Espessura                             | PRESP            | 1,07 mm                     | 2,08 mm |     |
| Peso específico                       | PRDNS            | 7745 Ka/m³                  |         |     |

Nos modelos desenvolvidos assume-se que o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson na direcção da espessura (z) são iguais aos correspondentes valores da direcção transversal (y). Para a materialização da influência das ligações nas peças, considera-se que esta se realiza numa área circular de diâmetro que varia de acordo com o tipo de ligação e com as dimensões dos componentes envolvidos na ligação. No caso das ligações por parafusos e rebites, já que estes atravessam as várias peças, estas são modeladas com furos de diâmetro igual ao recomendado para a montagem dos componentes. Utiliza-se um segundo círculo com diâmetro igual ao diâmetro exterior do componente de ligação para representar a área da sua influência directa nas peças. Na representação da soldadura, opta-se pela utilização de uma pequena superfície circular, sem furação, com uma área média semelhante à verificada neste processo de ligação. Na tabela 6.3 apresentam-se as

dimensões utilizadas na geometria de cada tipo de ligação. Na placa PLS, as duas superfícies representativas da ligação por soldadura são modeladas por adição à área principal de duas pequenas áreas circulares com 6 mm de diâmetro, localizadas nos pontos da ligação soldada. Procede-se de forma semelhante com as outras superfícies. Liga-se a placa PLP ao ligador através de um parafuso M8, modelando a superfície em forma de uma coroa circular com diâmetros interior 8.6 mm e exterior 13 mm, nos três pontos de ligação, como se pode ver no pormenor 4 da figura 6.4.

Tabela 6.3 Dimensões atribuídas aos círculos de simulação da ligação entre as peças

| Tipo de ligação      | Ø Interior (mm) | Ø Exterior (mm) |
|----------------------|-----------------|-----------------|
| Parafuso M8          | 8,3             | 13              |
| Parafuso M5          | 5,5             | 8,6             |
| Rebite Ø 5 mm        | 6               | 5               |
| Rebite Ø 4 mm        | 5               | 4               |
| Soldadura método MIG | -               | 6               |
| Soldadura por pontos | -               | 6               |

Após a modelação das três peças individualmente estas montam-se numericamente. A primeira montagem é entre a placa principal e a peça de ligação, formando o conjunto PLG, para realização da qual existem várias possibilidades. A primeira possibilidade é unir os perímetros das circunferências das peças individuais por superfícies ou através de elementos de viga que unem os nós colocados nas circunferências. A utilização de elementos de viga é a mais eficiente pois permite utilizar várias formas de parametrizar as ligações. A segunda possibilidade é unir os arcos dos círculos por superfícies cilíndricas. No entanto este meio de ligação é muito rígido e não permite a parametrização das ligações entre as peças impedindo desta forma que os modelos de elementos finitos sejam melhorados sob este aspecto. Opta-se por utilizar oito elementos de viga ligando cada um dos 4 nós existentes nos contornos dos círculos que formam as áreas de influência das ligações, a que se acrescenta uma massa pontual numa das extremidades de cada barra representando no seu conjunto a massa de cada parafuso. No pormenor 1 da figura 6.4 observam-se as oito vigas de ligação utilizadas. Para caracterizar estes elementos escolhe-se o elemento BEAM4 com os parâmetros apresentados na tabela 6.4, como valores iniciais para o processo de melhoramento.

Para caracterizar as massas utiliza-se o elemento de massa pontual (MASS21) que se aplica directamente nos nós. Procede-se da mesma forma na ligação entre o conjunto

PLG e a placa secundária, tendo em conta as várias variantes, conforme o tipo de ligação. No caso do parafuso M5 e dos rebites utilizam-se oito barras, como no caso anterior, enquanto que na ligação por soldadura aplicam-se quatro barras, porque se usa apenas um círculo a formar as áreas de influência da ligação. No pormenor 3 da figura 6.4 observa-se a materialização de uma ligação tipo soldadura.

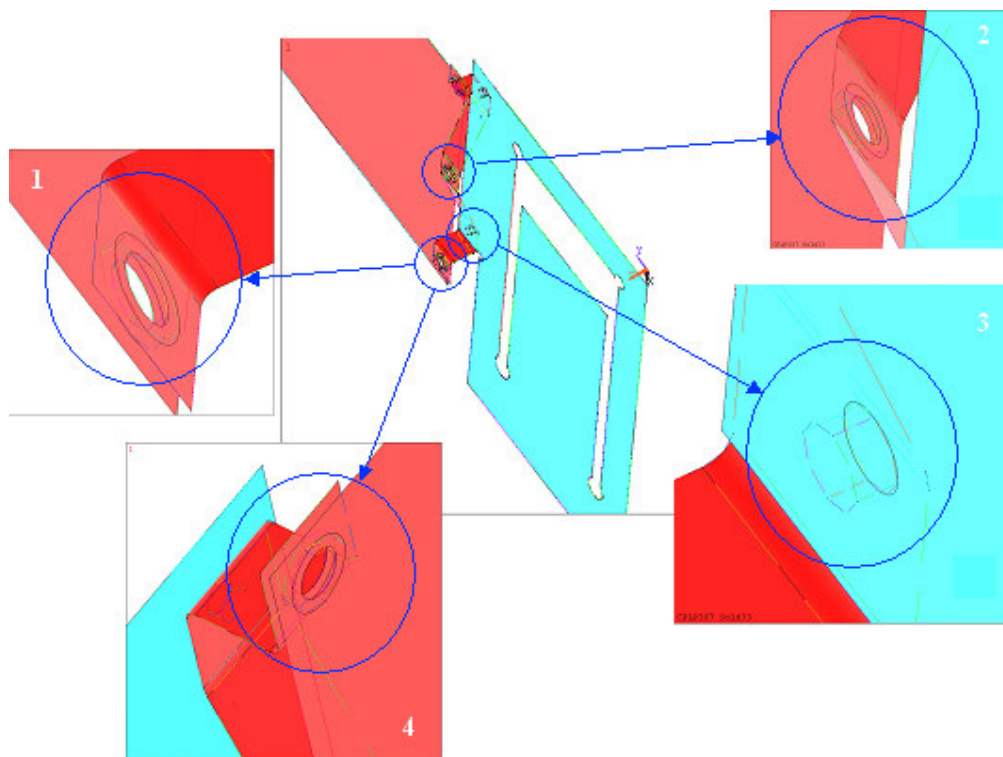


Figura 6.4 Aspecto geral e pormenores da montagem de todos os componentes do conjunto CPLP: (1) Ligação na extremidade da Placa PLP com Ligador LIG por 8 barras, (2) Ligação central da Placa PLP com Ligador LIG por 8 barras, (3) Ligação do Ligador LIG por 4 barras com a Placa PLS, (4) A mesma ligação que em 1 mas visto do lado da placa PLP

Uma vez construídos os modelos de elementos finitos das estruturas, procede-se à escolha dos melhores locais para montagem dos sensores. Dois dos pontos de aplicação dos sensores estão definidos à partida pois, como se discute na secção 6.2.1, sendo os locais de ligação das peças os mais indicados para aplicação da suspensão e da excitação. Para a determinação dos melhores locais de aplicação dos restantes sensores, bem como do número mínimo necessário, utilizam-se os próprios modelos de elementos finitos agora desenvolvidos. No entanto, do ponto de vista experimental o equipamento de análise espectral utilizado neste trabalho está limitado a, apenas cinco entradas de sinal. Também é necessário ter em conta o aumento de massa na estrutura provocado pela incorporação dos

sensores. Os próprios cabos eléctricos de ligação dos sensores ao equipamento de controlo têm uma influência que não pode ser desprezada. Devido às condicionantes do equipamento assume-se que o número máximo de acelerómetros possíveis de utilização é 5.

Definida a colocação dos primeiros dois acelerómetros, uma boa escolha da posição dos restantes três faz-se analisando as diversas configurações dos modos de vibração obtidos no modelo numérico para cada frequência natural. A escolha recai em pontos colocados o mais afastados possível das linhas modais. É de notar que o facto de se não utilizar um número mais elevado de sensores limita a informação experimental idealmente necessária para uma correcta configuração dos modos de vibração dos protótipos experimentais. Mas, mesmo assim, considera-se que é possível fazer uma verificação do grau de fiabilidade do modelo numérico em termos de frequências naturais e dos correspondentes modos de vibração, com os pontos escolhidos.

Tabela 6.4 Principais propriedades utilizadas na modelação das vigas representativas das ligações

| Parâmetro                                       |                  | Valor assumido no modelo   |             |           |
|---|------------------|----------------------------|-------------|-----------|
| Descrição                                       | Referência ANSYS | Parafuso M8                | Parafuso M5 | Soldadura |
| Módulo de Elasticidade em x, $E_x$              | PREX             | $1,69 \times 10^{11}$ Pa   |             |           |
| Módulo de Elasticidade em y, $E_y$              | PREY             | $1,94 \times 10^{11}$ Pa   |             |           |
| Módulo de Elasticidade em z, $E_z$              | PREZ             |                            |             |           |
| Coeficiente Poisson em xy, $\nu_{xy}$           | PRPXY            | 0,329                      |             |           |
| Coeficiente Poisson em yz, $\nu_{yz}$           | PRPYZ            | 0,353                      |             |           |
| Coeficiente Poisson em xz, $\nu_{xz}$           | PRPXZ            |                            |             |           |
| Módulo de Elasticidade transversal xy, $G_{xy}$ | PRGXY            | $6,9139 \times 10^{10}$ Pa |             |           |
| Módulo de Elasticidade transversal yz, $G_{yz}$ | PRGYZ            | $7,1693 \times 10^{10}$ Pa |             |           |
| Módulo de Elasticidade transversal xz, $G_{xz}$ | PRGXZ            | $6,7976 \times 10^{10}$ Pa |             |           |
| Largura, $l_g$                                  | PRLG             | 1,0 mm                     |             |           |
| Peso específico, $\rho$                         | PRDNS            | $7745 \text{ Kg/m}^3$      |             |           |

Os pontos escolhidos para aplicação dos sensores são mostrados na figura 6.5. Nos pontos 1 e 2 são colocados dois acelerómetros e feita a excitação alternadamente no ponto 1 e depois no ponto 2. A suspensão das peças é aplicada também junto a estes pontos, no ligador. Uma vez definida a localização dos sensores, altera-se o modelo numérico para introdução de novos pontos modais aproximadamente nos mesmos locais da aplicação do centro geométrico dos acelerómetros. Esta adaptação da geometria dos modelos destina-se a introduzir o efeito da massa dos sensores no modelo numérico para que este represente

com fiabilidade o modelo experimental. Nas figuras 6.6 e 6.7 mostram-se as alterações introduzidas.

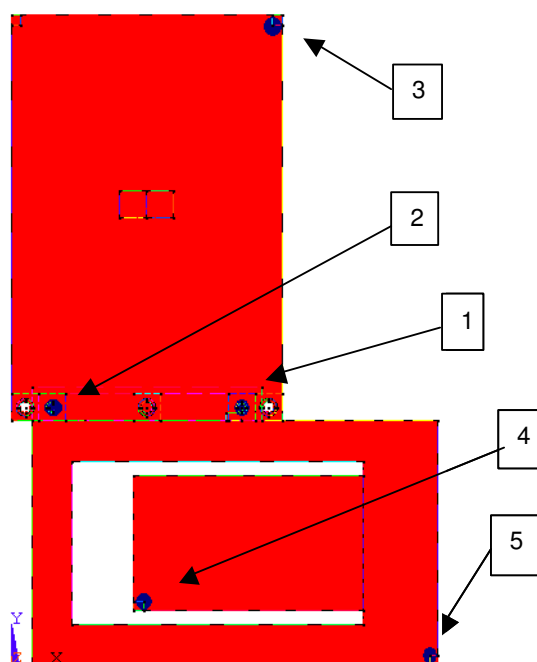


Figura 6.5 Localização dos sensores no conjunto de peças CPLP

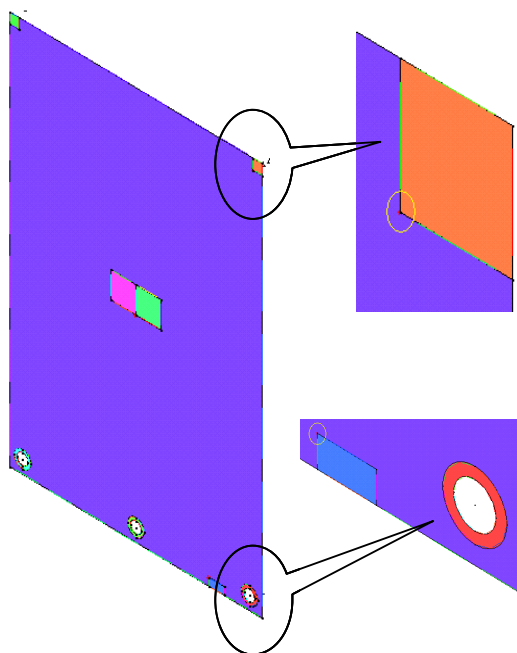


Figura 6.6 Pormenores das alterações geométricas introduzidas no modelo numérico da placa PLP

Outro aspecto a ter em conta é o efeito dos cabos de ligação dos sensores que provocam uma alteração da inércia dos sensores podendo modificar a intensidade dos deslocamentos nodais e consequentemente das acelerâncias. A determinação deste efeito não é possível e pode variar, de acordo com as condições de ensaio. Para associar o efeito dos cabos nos resultados afecta-se a massa de cada sensor de um factor que é variável durante o processo de melhoramento do modelo. Atribui-se a este factor um valor inicial unitário.

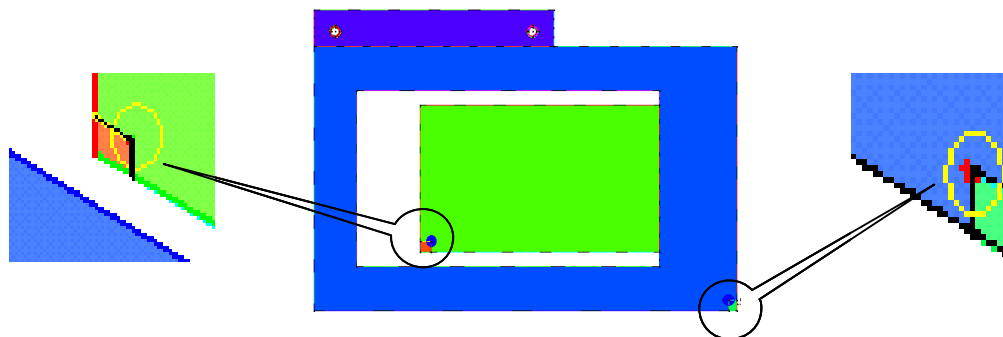


Figura 6.7 Pormenores das alterações geométricas introduzidas no modelo numérico da placa PLS

Definida a geometria, especificados os materiais e o tipo de elementos FEM a aplicar nas peças, procede-se à especificação e criação das malhas. O principal objectivo é distribuir a sua densidade de uma forma uniforme aumentando-a nas zonas das ligações e diminuindo-a nas restantes. Utiliza-se o mínimo possível de elementos de malha para aumentar a rapidez do programa no cálculo dos resultados. Por exemplo na proximidade dos locais dos sensores 3, 4 e 5, pode-se utilizar uma pequena densidade de malha, pois os pontos e os nós correspondentes, onde se pretende o deslocamento nodal estão bem definidos geometricamente não sendo necessário detalhar mais as malhas nestes locais.

O programa de elementos finitos permite definir as malhas de forma livre ou mapeada. Esta última permite uma melhor uniformidade de elementos e consequentemente uma melhor caracterização da geometria dos modos de vibração. No entanto, a geração de malhas por mapeamento obriga a aumentar a densidade de malha em zonas onde tal não é necessário para assegurar a sua construção. Assim opta-se por gerar malhas livres, de forma quadrangular nas placas PLP e PLS e por geração mapeada na estrutura LIG. Na figura 6.8 apresenta-se o aspecto geral da distribuição da malha nas peças.



Na placa PLP, a localização do primeiro sensor faz-se de acordo com a metodologia usada no conjunto. No entanto, nesta placa no local previsto para o primeiro sensor não existe furo pelo que se seguiu o mesmo critério que no terceiro, ou seja utiliza-se apenas um ponto colocado no alinhamento do centro dos círculos utilizados na peça de ligação. O terceiro acelerómetro já tem a sua posição definida que é a mesma estabelecida no conjunto. É ainda colocado outro acelerómetro no centro da placa, para permitir ter mais um valor de leitura. A escolha deste ponto central em detrimento do correspondente ao ponto dois do conjunto CPLP, apresentado na figura 6.5, tem a ver com a simetria da peça considerando-se que a informação recolhida no segundo ponto é redundante. É possível utilizar ainda mais sensores na análise desta placa, mas o acréscimo de informação que pode ser recolhida corresponde à colocação de novos sensores cujas massas provocam alterações no comportamento da peça em relação ao conjunto.

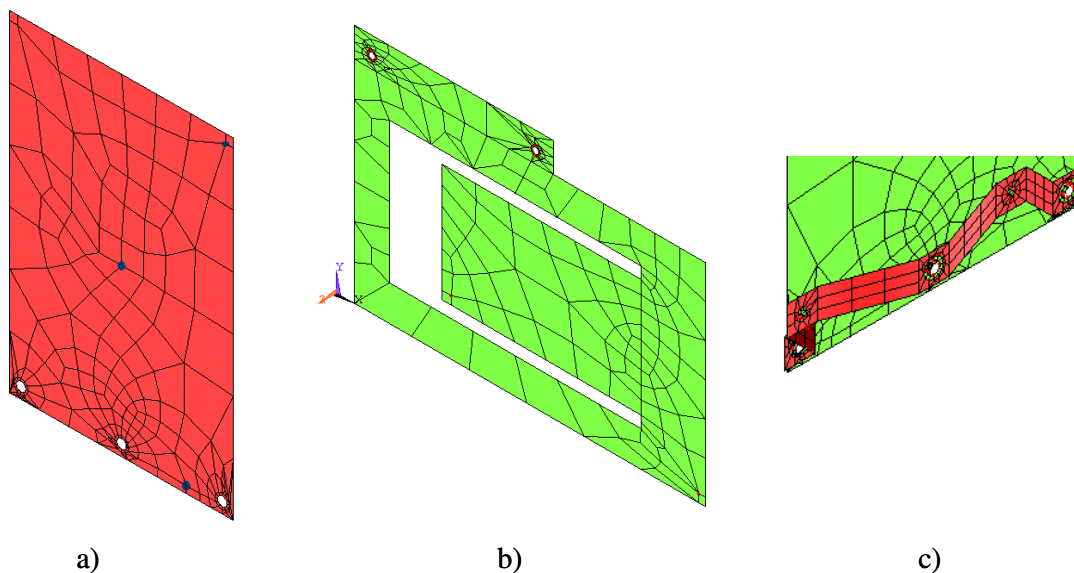


Figura 6.8 Aspecto da densidade e forma da malha escolhida para o conjunto de peças estudadas: a) Placa PLP; b) Placa PLS; c) Peça de ligação LIG

Após esta análise procede-se ao cálculo modal e à extracção de resultados. Para isso utiliza-se o método de iteração dos subespaços discutido na secção 2.5 deste trabalho. Como o objectivo deste trabalho é que os modelos de elementos finitos sejam utilizados de forma interactiva com o programa de melhoramento, é possível que, conforme os valores atribuídos aos parâmetros, os modelos, após cada cálculo, apresentem frequências naturais bastante variáveis. Por exemplo, basta aumentar um pouco o valor do parâmetro espessura

da placa PLP, para que as frequências naturais se alterem consideravelmente podendo com facilidade ultrapassar o limite máximo definido inicialmente para a obtenção destas. Neste caso o programa FEM só apresenta os resultados incluídos no campo especificado e pode acontecer que os resultados não possuam qualquer frequência dentro da gama escolhida, pelo que nenhum resultado é apresentado, causando problemas na fase de transferência de dados para o programa de optimização.

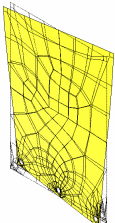
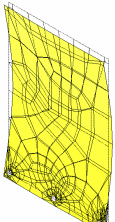
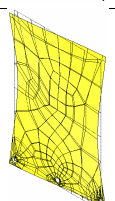
O problema inverso também pode acontecer, com o programa FEM a apresentar um número excessivo de resultados dentro do campo estabelecido quando a espessura da peça é muito pequena. Para obstar a estas dificuldades assegura-se que o programa FEM só conclui os cálculos se obtiver um número de frequências e modos suficientes, e que, por outro lado, termina o cálculo se forem ultrapassadas as 50 frequências naturais especificadas. Uma gama muito elevada de resultados conduz a maior dispêndio de tempo de execução dos cálculos modais, para mais que o processo numérico é iterativo. O limite máximo do valor da frequência natural e o número máximo de frequências são parametrizados inicialmente sendo os seus valores alterados de acordo com as necessidades de cálculo.

Na tabela 6.5 apresentam-se os primeiros resultados obtidos na análise modal da placa PLP, utilizando os valores das variáveis iniciais dos parâmetros também indicados na mesma tabela. As variáveis a melhorar são previamente adimensionalizadas. A variável  $l_{g1}$  representa o factor de afectação dos cabos nas massas dos sensores, PRM é o número de pontos da peça onde se lê o valor dos deslocamentos nodais e PRFRQ é a frequência limite a partir da qual se interrompem as iterações no cálculo modal. A primeira coluna de resultados contém as primeiras 9 frequências naturais encontradas durante o processo iterativo e nas três colunas seguintes os respectivos deslocamentos nodais nos três pontos de medição escolhidos. Pode observar-se que o primeiro modo é de torção e o segundo de flexão e têm frequências naturais relativamente próximas. O facto do modelo ser modelado mais rigorosamente altera o valor das próprias frequências naturais em relação ao apresentado na tabela 6.1.

Procedimento análogo é desenvolvido para o modelo PLG correspondente à montagem da peça PLP com o ligador. Os resultados são apresentados nas tabelas 6.6 e 6.7. Neste caso o número de variáveis aumenta, pois introduzem-se as correspondentes às propriedades das vigas de ligação entre as peças, nomeadamente a  $E_{XA}$ ,  $\rho_A$ ,  $u_{XYA}$  e  $l_{g1}$ . A

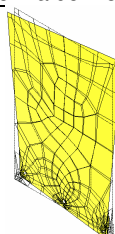

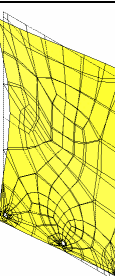
variável  $l_{gA1}$  agora representa o efeito do cabo do sinal na massa do sensor aplicado num dos pontos escolhidos. Introduce-se também uma nova variável que representa o efeito dos cabos de ligação do conjunto acelerómetro sensor de força que se localizam no ponto de excitação, designada  $l_{gA2}$ .

Tabela 6.5 Primeiros resultados obtidos na análise modal da placa PLP

| Modo          | Freq. Nat | Forma do modo  | Valores  |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
|---------------|-----------|--|--|---------------|---------|---------|---------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|--------|
| 1             | 94.7 Hz   |   | Variáveis iniciais   |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
|               |           |  | $E_x = .16900 \cdot 10^{+12}$ Pa<br>$E_y = .19400 \cdot 10^{+12}$ Pa<br>$\rho = .7745 \cdot 10^{+4}$ Kg/m <sup>3</sup><br>$u_{xy} = .32900 \cdot 10^{+0}$<br>$u_{yz} = .35300 \cdot 10^{+0}$<br>$h = .182 \cdot 10^{+1}$ mm<br>$l_{g1} = .1 \cdot 10^{+1}$ mm<br>$PRM = .03 \cdot 10^{+2}$<br>$PRFRQ = 0.500 \cdot 10^{+3}$ Hz   |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
| 2             | 100.2 Hz  |   | Resultados   |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
|               |           |  | <table> <tr> <th>Freq. Natural</th><th>Ponto 1</th><th>Ponto 2</th><th>Ponto 3</th></tr> <tr> <td>94.71</td><td>-1.762</td><td>0.028</td><td>2.574</td></tr> <tr> <td>100.15</td><td>1.898</td><td>-1.140</td><td>1.781</td></tr> <tr> <td>218.00</td><td>-2.008</td><td>-0.035</td><td>-2.676</td></tr> <tr> <td>235.42</td><td>0.298</td><td>-1.486</td><td>2.037</td></tr> <tr> <td>273.13</td><td>-1.371</td><td>-0.004</td><td>0.058</td></tr> <tr> <td>314.87</td><td>1.207</td><td>-0.020</td><td>-3.181</td></tr> <tr> <td>405.28</td><td>2.069</td><td>-0.001</td><td>-2.413</td></tr> <tr> <td>471.13</td><td>0.124</td><td>1.725</td><td>2.409</td></tr> <tr> <td>565.75</td><td>1.813</td><td>1.630</td><td>1.873</td></tr> </table> | Freq. Natural | Ponto 1 | Ponto 2 | Ponto 3 | 94.71 | -1.762 | 0.028 | 2.574 | 100.15 | 1.898 | -1.140 | 1.781 | 218.00 | -2.008 | -0.035 | -2.676 | 235.42 | 0.298 | -1.486 | 2.037 | 273.13 | -1.371 | -0.004 | 0.058 | 314.87 | 1.207 | -0.020 | -3.181 | 405.28 | 2.069 | -0.001 | -2.413 | 471.13 | 0.124 | 1.725 | 2.409 | 565.75 |
| Freq. Natural | Ponto 1   | Ponto 2  | Ponto 3  |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
| 94.71         | -1.762    | 0.028  | 2.574  |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
| 100.15        | 1.898     | -1.140   | 1.781  |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
| 218.00        | -2.008    | -0.035   | -2.676   |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
| 235.42        | 0.298     | -1.486   | 2.037  |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
| 273.13        | -1.371    | -0.004   | 0.058  |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
| 314.87        | 1.207     | -0.020   | -3.181   |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
| 405.28        | 2.069     | -0.001   | -2.413   |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
| 471.13        | 0.124     | 1.725  | 2.409  |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
| 565.75        | 1.813     | 1.630  | 1.873  |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
| 3             | 218.0 Hz  |  |  |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |
|               |           |  |  |               |         |         |         |       |        |       |       |        |       |        |       |        |        |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |       |        |        |        |       |        |        |        |       |       |       |        |

Para a obtenção de resultados fazem-se duas análises uma com a excitação no ponto 1, designada f1, e outra no ponto 2, designada f2. Para isso o acelerómetro colocado no centro da placa PLP é retirado, passando a sua localização para o segundo ponto de excitação. Como o sensor de força se coloca sempre no local de excitação, é necessário construir dois modelos de elementos finitos iguais excepto no posicionamento deste sensor. Desta forma a alteração do modelo numérico consta da adição da uma massa de 20 gramas alternadamente no ponto 1 ou no ponto 2, conforme o caso de aplicação do sensor de força. Obtêm-se assim resultados ligeiramente diferentes, conforme o caso, como se pode ver nas tabelas 6.6 e 6.7. As frequências naturais obtidas são muito semelhantes e os modos de vibração apenas apresentam amplitudes ligeiramente diferentes.

Tabela 6.6 Resultados obtidos na análise modal da placa PLG com excitação em f1

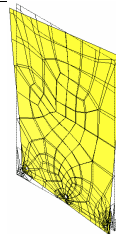

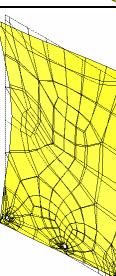
| Modo          | Freq. Nat | Forma do modo  | Valores   |         |  |  |
|---------------|-----------|--|---|---------|--|--|
| 1             | 88.9 Hz   |   | Variáveis iniciais  |         |  |  |
|               |           |  | <div>E<sub>x</sub>=.16900 10<sup>+12</sup> Pa<br/>E<sub>xA</sub>=.16900 10<sup>+12</sup> Pa<br/>E<sub>y</sub>=.19400 10<sup>+12</sup> Pa<br/>ρ=.7745 10<sup>+4</sup> Kg/m<sup>3</sup><br/>ρ<sub>A</sub>=.01 10<sup>+4</sup> Kg/m<sup>3</sup><br/>u<sub>xy</sub>=.32900 10<sup>+1</sup><br/>u<sub>xyA</sub>=.32900 10<sup>+1</sup><br/>u<sub>yz</sub>=.35300 10<sup>+1</sup><br/>h=.182 10<sup>+1</sup> mm<br/>l<sub>g1</sub>=.1 10<sup>+1</sup> mm<br/>l<sub>gA1</sub>=.1 10<sup>+1</sup><br/>l<sub>gA2</sub>=.1 10<sup>+1</sup><br/>PRM=.03 10<sup>+2</sup><br/>PRFRQ=0.500 10<sup>+3</sup> Hz</div> |         |  |  |
| 2             | 91.9 Hz   |   | Resultados  |         |  |  |
| 3             | 212.9 Hz  |  |   |         |  |  |
|               |           |  |   |         |  |  |
|               |           |  |   |         |  |  |
|               |           |  |   |         |  |  |
|               |           |  |   |         |  |  |
|               |           |  |   |         |  |  |
| Freq. Natural |           | Ponto 1  | Ponto 2   | Ponto 3 |  |  |
| 88.90         |           | 1.496  | -1.604  | -2.654  |  |  |
| 91.89         |           | 1.301  | 1.223   | 1.649   |  |  |
| 212.87        |           | -1.324   | 1.336   | -2.755  |  |  |
| 237.11        |           | 0.789  | 0.805   | 1.790   |  |  |
| 260.66        |           | -0.466   | -0.517  | 0.980   |  |  |

Os resultados apresentados nas tabelas 6.5 e 6.6 são obtidos com as peças modeladas com furos de ligação no ligador para parafuso M8. Os resultados para os outros tipos de ligação, i. é, soldadura e rebites, são muito semelhantes pelo que não se apresentam aqui. Analisando estes resultados pode concluir-se que a adição da peça de ligação não altera significativamente as formas dos modos de vibração da placa montada em relação aos valores obtidos na placa isoladamente. Apenas lhe aumenta a massa, tendo como consequência o abaixamento das frequências naturais e a diminuição das amplitudes dos deslocamentos nodais no ponto de excitação. Nota-se agora uma maior proximidade entre os valores das primeiras duas frequências naturais.

Nas placas PLS procede-se da mesma forma. Neste caso o número de variáveis é menor, pois apenas se utilizam as propriedades da placa. A variável  $l_{gA1}$  permite alterar a flexibilidade da parte central da placa variando o comprimento dos dois rasgos centrais até próximo da aresta lateral direita da peça, ou seja através da variação da largura da superfície da peça que suporta a sua parte central variando a flexibilidade. As variáveis

$l_{gA2}$ ,  $l_{gA3}$  e  $l_{gA4}$ , representam o efeito do cabo coaxial de transmissão do sinal na massa de cada sensor aplicado num dos pontos escolhidos. Fazem-se da mesma forma duas análises uma com a excitação em f1 e outra em f2 e consideram-se os vários tipos de ligação.

Tabela 6.7 Resultados obtidos na análise modal da placa PLG com excitação em f2

| Modo          | Freq. Nat | Forma do modo  | Valores  |         |  |  |
|---------------|-----------|--|--|---------|--|--|
| 1             | 88.8 Hz   |   | Variáveis iniciais   |         |  |  |
|               |           |  | <div>E<sub>x</sub>=.16900 10<sup>+12</sup> Pa<br/>E<sub>xA</sub>=.16900 10<sup>+12</sup> Pa<br/>E<sub>y</sub>=.19400 10<sup>+12</sup> Pa<br/>ρ=.7745 10<sup>+4</sup> Kg/m<sup>3</sup><br/>ρ<sub>A</sub>=.01 10<sup>+4</sup> Kg/m<sup>3</sup><br/>u<sub>xy</sub>=.32900 10<sup>+1</sup><br/>u<sub>xy A</sub>=.32900 10<sup>+1</sup><br/>u<sub>yz</sub>=.35300 10<sup>+1</sup><br/>h=.182 10<sup>+1</sup> mm<br/>l<sub>g1</sub>=.1 10<sup>+1</sup> mm<br/>l<sub>gA1</sub>=.1 10<sup>+1</sup><br/>l<sub>gA2</sub>=.1 10<sup>+1</sup><br/>PRM=.03 10<sup>+2</sup><br/>PRFRQ=0.500 10<sup>+3</sup> Hz</div> |         |  |  |
| 2             | 92.0 Hz   |   | Resultados   |         |  |  |
| 3             | 212.9 Hz  |  |  |         |  |  |
|               |           |  |  |         |  |  |
|               |           |  |  |         |  |  |
|               |           |  |  |         |  |  |
|               |           |  |  |         |  |  |
|               |           |  |  |         |  |  |
| Freq. Natural |           | Ponto 1  | Ponto 2  | Ponto 3 |  |  |
| 88.82         |           | 1.347  | -1.717   | -2.839  |  |  |
| 91.96         |           | 1.489  | 1.009  | 1.305   |  |  |
| 212.85        |           | 1.319  | -1.339   | 2.745   |  |  |
| 237.13        |           | 0.844  | 0.751  | 1.869   |  |  |
| 260.64        |           | -0.480   | -0.502   | 0.952   |  |  |

Na tabela 6.8 apresentam-se os valores das variáveis utilizadas e os resultados para o modelo com a ligação através do parafuso M5. Os modos de vibração obtidos nos modelos preparados para as ligações por rebite e soldadura são muito semelhantes aos apresentados na tabela 6.8. Nas tabelas 6.9 a 6.12 mostram-se os resultados de todas as hipóteses admitidas, onde se pode confirmar que as frequências naturais são muito semelhantes e os modos de vibração apenas apresentam amplitudes ligeiramente diferentes. Seguindo o mesmo procedimento das anteriores, faz-se também a análise nos conjuntos CPLP, utilizando-se agora as variáveis apresentadas na tabela 6.13. Na tabela 6.14 apresentam-se as formas dos primeiros modos de vibração obtidas e nas tabelas 6.15 a 6.18 os resultados em função dos diversos tipos de ligação. Na análise destes conjuntos utilizam-se 16 variáveis, das quais 5 servem para a caracterização das peças, assumindo-se

que são comuns a todas as peças do conjunto. No entanto, é perfeitamente possível alterar este critério definindo uma variável especificamente para cada material e cada peça. Critério semelhante é aplicado para os elementos de viga de ligação, admitindo-se que o seu material é isotrópico. As restantes variáveis são idênticas às dos casos anteriores.

Tabela 6.8 Resultados obtidos na análise modal da placa PLS com ligação por M5

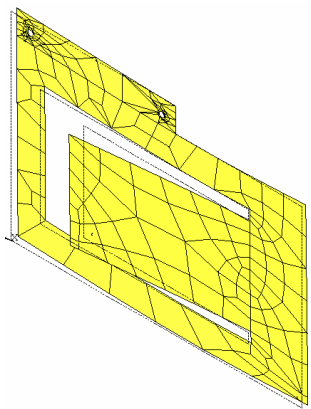
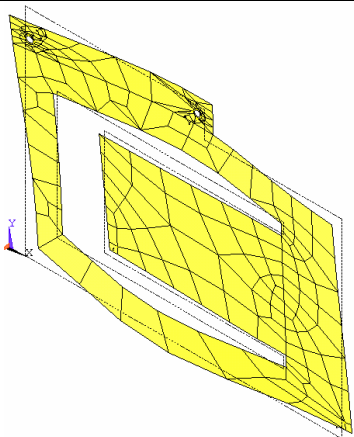
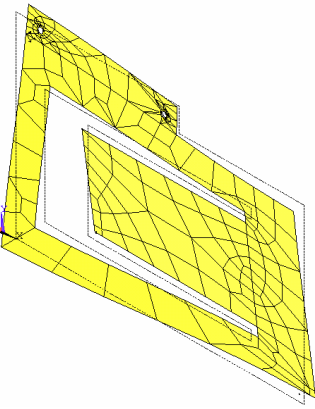
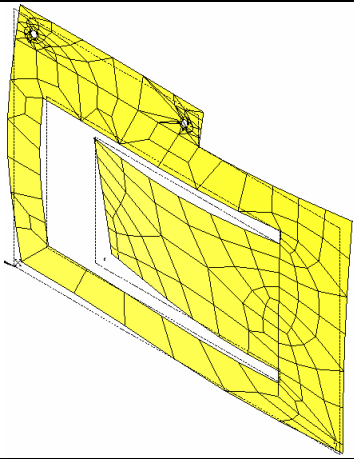
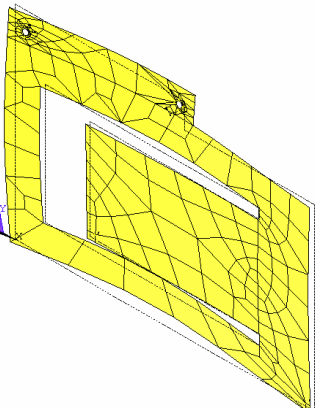
| Modo | Freq. Nat | Forma do modo   | Modo  | Freq. Nat | Forma do modo   |
|------|-----------|---|---|-----------|---|
| 1    | 14.3 Hz   |    | 4   | 86.5 Hz   |   |
| 2    | 33.7 Hz   |  | 5   | 99.5 Hz   |  |
| 3    | 52.3 Hz   |  | Valor das variáveis<br>$E_x = .16900 \cdot 10^{+12} \text{ Pa}$<br>$E_y = .19400 \cdot 10^{+12} \text{ Pa}$<br>$\rho = .7745 \cdot 10^{+4} \text{ Kg/m}^3$<br>$u_{xy} = .32900 \cdot 10^{+1}$<br>$u_{yz} = .35300 \cdot 10^{+1}$<br>$h = .1017 \cdot 10^{+1} \text{ mm}$<br>$I_{GA1} = .1 \cdot 10^{+1}$<br>$I_{GA2} = .1 \cdot 10^{+1}$<br>$I_{GA3} = .1 \cdot 10^{+1}$<br>$I_{GA4} = .1 \cdot 10^{+1}$<br>$PRM = .04 \cdot 10^{+2}$<br>$PRFRQ = 0.500 \cdot 10^{+3} \text{ Hz}$ |           |   |

Tabela 6.9 Resultados obtidos na análise modal da placa PLS com ligação por M5

| Excitação em f1 |                      |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |
| 14.3            | -1.515               | -0.084  | 3.871   | -1.640  | 14.4            | -1.553               | -0.111  | 3.877   | -1.633  |
| 33.7            | 2.886                | -0.258  | 1.759   | 3.007   | 34.0            | 2.995                | -0.185  | 1.742   | 3.236   |
| 52.3            | 1.140                | -3.128  | 0.803   | 1.204   | 51.9            | 1.253                | -3.056  | 0.779   | 1.076   |
| 86.5            | -2.992               | 2.495   | 1.339   | 2.613   | 86.9            | -3.042               | 2.474   | 1.488   | 2.919   |
| 99.5            | -1.281               | -0.934  | -5.414  | -0.442  | 99.6            | -1.444               | -0.757  | -5.471  | -0.108  |
| 101.8           | 0.727                | 0.420   | -2.445  | 4.592   | 101.9           | 0.856                | 0.376   | -2.261  | 4.892   |

Tabela 6.10 Resultados obtidos na análise modal da placa PLS com ligação por Soldadura

| Excitação em f1 |                      |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |
| 14.3            | -1.525               | -0.075  | 3.871   | -1.642  | 14.4            | -1.563               | -0.102  | 3.877   | -1.612  |
| 33.7            | 2.896                | -0.295  | 1.761   | 3.009   | 34.0            | 3.004                | -0.223  | 1.744   | 3.000   |
| 52.3            | 1.194                | -3.115  | 0.797   | 1.201   | 51.9            | 1.306                | -3.044  | 0.773   | 1.174   |
| 86.5            | -3.034               | 2.482   | 1.346   | 2.611   | 86.9            | -3.082               | 2.463   | 1.494   | 2.716   |
| 99.5            | -1.277               | -0.929  | -5.405  | -0.455  | 99.6            | -1.444               | -0.753  | -5.461  | -0.202  |
| 101.8           | 0.709                | 0.404   | -2.459  | 4.594   | 101.9           | 0.837                | 0.360   | -2.282  | 4.563   |

Tabela 6.11 Primeiros Resultados obtidos na análise modal da placa PLS com ligação por Rebite Diâmetro 5

| Excitação em f1 |                      |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |
| 14.3            | -1.528               | -0.076  | 3.871   | -1.640  | 14.4            | -1.566               | -0.103  | 3.877   | -1.610  |
| 33.7            | 2.904                | -0.292  | 1.760   | 3.008   | 34.0            | 3.012                | -0.219  | 1.742   | 2.999   |
| 52.3            | 1.198                | -3.123  | 0.802   | 1.206   | 51.9            | 1.311                | -3.052  | 0.778   | 1.179   |
| 86.6            | -3.047               | 2.497   | 1.343   | 2.611   | 86.9            | -3.093               | 2.478   | 1.492   | 2.717   |
| 99.5            | -1.278               | -0.926  | -5.415  | -0.438  | 99.6            | -1.445               | -0.748  | -5.472  | -0.181  |
| 101.8           | 0.717                | 0.405   | -2.440  | 4.594   | 101.9           | 0.848                | 0.360   | -2.258  | 4.561   |

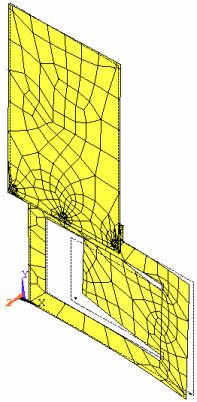
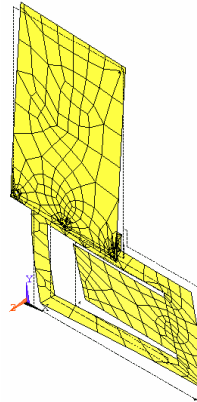
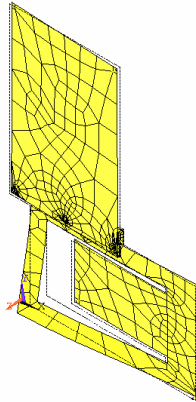
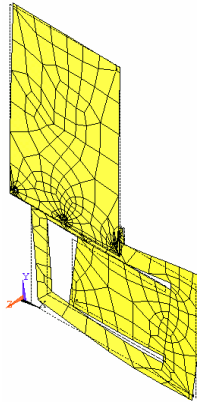
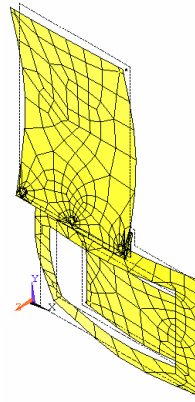
Tabela 6.12 Resultados obtidos na análise modal da placa PLS com ligação por Rebite Diâmetro 4

| Excitação em f1 |                      |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |
| 14.3            | -1.534               | -0.072  | 3.871   | -1.642  | 14.4            | -1.572               | -0.099  | 3.876   | -1.612  |
| 33.7            | 2.914                | -0.312  | 1.763   | 3.010   | 34.0            | 3.023                | -0.240  | 1.746   | 3.001   |
| 52.4            | 1.211                | -3.123  | 0.796   | 1.201   | 52.0            | 1.323                | -3.052  | 0.771   | 1.173   |
| 86.6            | -3.066               | 2.498   | 1.346   | 2.609   | 87.0            | -3.112               | 2.479   | 1.495   | 2.715   |
| 99.5            | -1.274               | -0.925  | -5.416  | -0.436  | 99.6            | -1.443               | -0.747  | -5.471  | -0.182  |
| 101.8           | 0.713                | 0.407   | -2.436  | 4.599   | 101.9           | 0.843                | 0.361   | -2.258  | 4.566   |

Tabela 6.13 Descrição e valor utilizado nas variáveis do conjunto CPLP

|  |  |
|--|--|
| Característica das peças                       | $E_x = .16900 \cdot 10^{+12}$ Pa                 |
| Característica das barras de ligação           | $E_{xA} = .16900 \cdot 10^{+12}$ Pa              |
| Característica das peças                       | $E_y = .19400 \cdot 10^{+12}$ Pa                 |
| Característica das peças                       | $\rho = .7745 \cdot 10^{+4}$ Kg/m <sup>3</sup>   |
| Característica das barras de ligação           | $\rho_A = .7745 \cdot 10^{+4}$ Kg/m <sup>3</sup> |
| Característica das peças                       | $u_{xy} = .32900 \cdot 10^{+1}$                  |
| Característica das barras de ligação           | $u_{xyA} = .32900 \cdot 10^{+1}$                 |
| Característica das peças                       | $u_{yz} = .35300 \cdot 10^{+1}$                  |
| Espessura das placas PLP e LIG                 | $h = .182 \cdot 10^{+1}$ mm                      |
| Espessura das placas PLS                       | $h_1 = .1017 \cdot 10^{+1}$ mm                   |
| Largura das barras de ligação entre PLP e LIG  | $l_{g1} = .1 \cdot 10^{+1}$ mm                   |
| Largura das barras de ligação entre PLS e LIG  | $l_{g2} = .1 \cdot 10^{+1}$ mm                   |
| Flexibilização da parte central da placa PLS   | $l_{gA1} = .1 \cdot 10^{+1}$                     |
| Factor de afectação do acelerómetro A1 ou A2   | $l_{gA2} = .1 \cdot 10^{+1}$                     |
| Factor de afectação do aceler A1 ou A2 e T. F. | $l_{gA3} = .1 \cdot 10^{+1}$                     |
| Factor de afectação do acelerómetro A3 ou A4   | $l_{gA4} = .1 \cdot 10^{+1}$                     |
| Número máximo de modos calculados              | PRM = .05 $10^{+2}$                              |
| Limite superior de frequência                  | PRFRQ = 0.200 $10^{+3}$ Hz                       |

Tabela 6.14 Resultados obtidos na análise modal do conjunto CPLP com ligação por M5

| 1º Modo   | 2º Modo   | 3º Modo   | 4º Modo  | 5º Modo   |
|---|---|---|--|---|
| 13.18 Hz  | 14.83 Hz  | 26.17 Hz  | 44.91 Hz   | 71.88 Hz  |
|  |  |  |  |  |

Como principais conclusões, pode-se dizer que estes resultados se apresentam com boa consistência para serem um bom ponto de partida na comparação com os resultados experimentais que se apresentam no ponto 6.4. Estes resultados, obtidos através dos



modelos de elementos finitos agora apresentados, revelam-se muito sensíveis a pequenas variações estruturais como é o caso, por exemplo, das diferenças encontradas nos resultados obtidos com a aplicação da massa do sensor de força no ponto um ou no ponto dois.

Tabela 6.15 Resultados obtidos na análise modal do conjunto CPLP com ligação por M5

| Excitação em f1 |                      |         |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |
| 13.2            | 0.126                | -0.520  | 0.611   | 3.845   | -2.501  | 13.2            | 0.121                | -0.521  | 0.612   | 3.856   | -2.449  |
| 14.8            | 1.239                | 0.647   | -0.483  | -1.877  | -2.739  | 14.8            | 1.244                | 0.643   | -0.476  | -1.855  | -2.570  |
| 26.2            | -0.351               | 0.535   | -1.122  | 1.213   | 1.358   | 26.2            | -0.355               | 0.531   | -1.119  | 1.217   | 1.373   |
| 44.9            | 0.554                | 0.314   | 0.147   | 1.202   | 2.041   | 44.9            | 0.555                | 0.314   | 0.151   | 1.201   | 1.751   |
| 71.9            | -0.351               | 0.585   | 1.587   | 1.833   | 2.969   | 71.9            | -0.353               | 0.585   | 1.600   | 1.832   | 2.848   |
| 82.1            | 0.827                | 0.601   | 1.345   | -0.881  | -0.948  | 82.2            | 0.808                | 0.619   | 1.379   | -0.922  | -0.986  |

Tabela 6.16 Resultados obtidos na análise modal do conjunto CPLP com ligação por Soldadura

| Excitação em f1 |                      |         |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |
| 13.2            | 0.139                | -0.534  | 0.614   | 3.845   | -2.462  | 13.2            | 0.135                | -0.534  | 0.614   | 3.855   | -2.451  |
| 14.7            | 1.252                | 0.637   | -0.484  | -1.869  | -2.555  | 14.8            | 1.256                | 0.633   | -0.478  | -1.851  | -2.563  |
| 26.0            | -0.369               | 0.552   | -1.119  | 1.221   | 1.358   | 26.0            | -0.372               | 0.547   | -1.116  | 1.225   | 1.363   |
| 44.7            | 0.554                | 0.308   | 0.145   | 1.203   | 1.767   | 44.7            | 0.556                | 0.308   | 0.150   | 1.202   | 1.765   |
| 71.7            | -0.377               | 0.601   | 1.577   | 1.836   | 2.852   | 71.7            | -0.378               | 0.600   | 1.588   | 1.831   | 2.846   |
| 82.0            | 0.835                | 0.581   | 1.335   | -0.866  | -0.900  | 82.1            | 0.813                | 0.602   | 1.372   | -0.904  | -0.956  |

Tabela 6.17 Resultados obtidos na análise modal do conjunto CPLP com ligação por Rebite Diâmetro 5

| Excitação em f1 |                      |         |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |
| 13.2            | 0.131                | -0.523  | 0.615   | 3.843   | -2.464  | 13.1            | 0.126                | -0.523  | 0.615   | 3.852   | -2.453  |
| 14.7            | 1.244                | 0.651   | -0.487  | -1.870  | -2.547  | 14.7            | 1.248                | 0.647   | -0.480  | -1.851  | -2.556  |
| 26.0            | -0.357               | 0.537   | -1.118  | 1.226   | 1.357   | 25.9            | -0.361               | 0.532   | -1.114  | 1.230   | 1.361   |
| 44.6            | 0.557                | 0.314   | 0.144   | 1.204   | 1.773   | 44.6            | 0.558                | 0.314   | 0.149   | 1.202   | 1.771   |
| 71.7            | -0.355               | 0.578   | 1.569   | 1.837   | 2.858   | 71.7            | -0.356               | 0.577   | 1.580   | 1.833   | 2.852   |
| 82.0            | 0.834                | 0.588   | 1.332   | -0.870  | -0.904  | 82.1            | 0.814                | 0.608   | 1.370   | -0.908  | -0.959  |

Nos conjuntos CPLP as frequências naturais são muito pouco afectadas pela presença das massas dos acelerómetros, apresentando apenas uma diferença máxima de

0,15 % sendo a variação dos deslocamentos nodais de 15 %. No caso da placa PLS a variação das frequências naturais entre os modelos é mais acentuada. Podem-se encontrar diferenças nas frequências naturais de 1 % e nos deslocamentos nodais de 75 %. Esta variação mais acentuada justifica-se pela maior influência da massa dos sensores em relação à massa das peças em análise. Conclusão semelhante tira-se relativamente às diferenças encontradas entre as várias análises feitas às várias formas de ligação.

Tabela 6.18 Resultados obtidos na análise modal do conjunto CPLP com ligação por Rebite Diâmetro 4

| Excitação em f1 |                      |         |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |
| 13.1            | 0.133                | -0.527  | 0.617   | 3.843   | -2.462  | 13.1            | 0.129                | -0.527  | 0.618   | 3.853   | -2.451  |
| 14.6            | 1.247                | 0.650   | -0.488  | -1.862  | -2.545  | 14.7            | 1.251                | 0.646   | -0.482  | -1.843  | -2.554  |
| 25.9            | -0.363               | 0.540   | -1.115  | 1.234   | 1.353   | 25.9            | -0.367               | 0.535   | -1.112  | 1.238   | 1.357   |
| 44.4            | 0.558                | 0.313   | 0.142   | 1.204   | 1.783   | 44.4            | 0.560                | 0.313   | 0.147   | 1.202   | 1.780   |
| 71.7            | -0.360               | 0.579   | 1.564   | 1.836   | 2.857   | 71.7            | -0.361               | 0.578   | 1.575   | 1.832   | 2.852   |
| 82.0            | 0.839                | 0.581   | 1.325   | -0.866  | -0.893  | 82.0            | 0.818                | 0.601   | 1.363   | -0.904  | -0.949  |

Outra conclusão que se pode tirar é que apesar das diferenças encontradas, as formas dos modos de vibração não mudam significativamente o seu aspecto, pelo que com boa aproximação qualquer dos modelos de elementos finitos previstos, independentemente das quatro áreas de influência previstas para aplicação do meio de ligação, pode ser utilizado para a fase seguinte de melhoramento em função dos resultados experimentais. As variáveis a utilizar no processo de melhoramento abrangem todos os componentes estruturais envolvidos na análise, o que permite assegurar uma boa adequação dos modelos de elementos finitos ao processo de melhoramento desenvolvido neste trabalho.

### 6.3 Instrumentação e Técnicas Laboratoriais

Para se executar um teste modal são vários os equipamentos que devem estar disponíveis para o processo de ensaio (Braun, S., 2002:813-820). Estes equipamentos são controlados através de códigos específicos instalados no computador que recebe os sinais, permitindo a coordenação da operação do sistema global e aumentando as capacidades de processamento de dados. O primeiro objectivo é obter o movimento da estrutura, no caso presente, em termos de aceleração ou a correspondente acelerância em termos da FRF para identificar a sua mobilidade. A mobilidade da estrutura envolve a sua excitação aleatória

dentro da gama de frequências escolhida com uma força que é medida. É com este princípio que são utilizados estimadores na base de métodos estatísticos, para obter a resposta da estrutura em termos de médias em relação à força da excitação aplicada. O estimador escolhido para estes testes, como referido na secção 5.2 é o  $H_2$ , que minimiza o efeito do ruído de entrada durante o processo de cálculo das médias.

Os componentes do equipamento intervenientes no processo de aquisição de dados estão esquematicamente representados na Figura 6.9, que mostra uma preparação típica de um sistema completo. Basicamente, há três conjuntos de equipamentos principais:

- . o sistema de excitação
- . o equipamento de medida sensorial.
- . o sistema de aquisição e processamento de dados

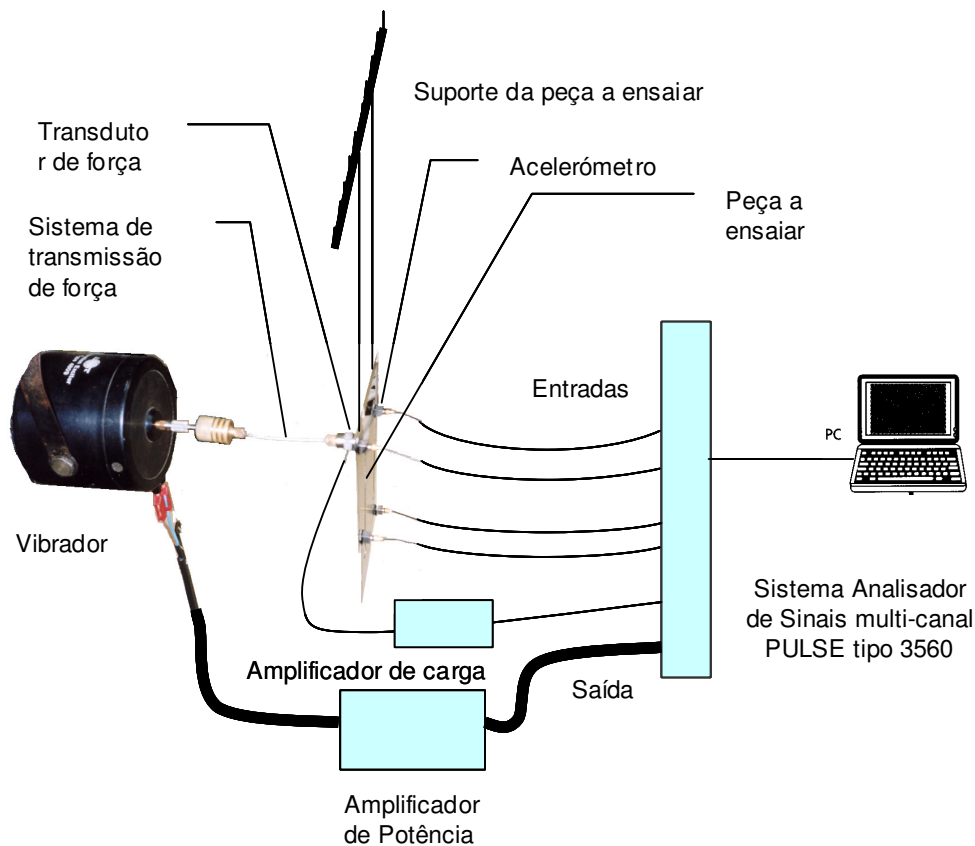


Figura 6.9 Montagem dos instrumentos e analisador de sinais para obtenção das FRF

Este tipo de medida de resposta de frequência é feito usando o analisador de sinais com 5 entradas PULSE Multi-analyzer System Type 3560 da marca Brüel & Kjær. Na figura 6.10 mostra-se o conjunto do equipamento no laboratório no qual são conduzidos os ensaios experimentais.



Figura 6.10 Aspecto do laboratório de vibrações do IST

A força de excitação, de frequência aleatória, é exercida nas peças por um excitador de vibração e lida por um transdutor de força, cujo sinal de resposta é enviado para uma das entradas do analisador. A excitação das peças é feita através de um tirante para permitir a transmissão da força na direcção perpendicular à estrutura, evitando a sobreposição de momentos de excitação. O sensor de força é colocado na extremidade do ponteiro em oposição ao acelerómetro, para ser possível obter as formas dos modos de vibração. Os acelerómetros são aplicados nos pontos das peças escolhidos na análise dos modelos de elementos finitos e os sinais de resposta enviados para as outras entradas disponíveis do analisador. A resposta de frequência da estrutura é medida em termos das acelerações. As quantidades medidas são obtidas na razão complexa da aceleração em relação à força de excitação, no domínio da frequência. O ponto de excitação é fixo e é usado como posição de referência, enquanto a resposta dos acelerómetros é colhida nos pontos das peças escolhidos de modo a evitar, tanto quanto possível os nodos da estrutura, nos quais a amplitude dos deslocamentos dos modos de vibração é nula. A ressonância é identificada, para valores baixos de amortecimento, como um pico na amplitude da função resposta em frequência obtida directamente em gráfico, no analisador, e a frequência é obtida lendo

directamente no eixo das abcissas. Da mesma forma o analisador fornece os resultados em forma de lista de valores. Uma descrição pormenorizada do equipamento utilizado assim como a sequência de operações envolvida na concretização dos ensaios estão descritos é feita no apêndice III deste trabalho.

## 6.4 Ensaios Experimentais

As peças são construídas de acordo com os desenhos apresentados no Apêndice I, sendo executados seis conjuntos do modelo PLS associados com o modelo LIG, e ligados todos de maneira diferente. São feitos também dois exemplares do modelo PLP. Não se aplica às peças um revestimento superficial de protecção contra a oxidação, para evitar as consequências do aumento de peso ou de alteração das propriedades, devidas ao depósito de um material diferente do material base na sua superfície. Os ensaios obedecem ao seguinte critério:

- 1) Testar todas as peças secundárias disponíveis. Para isso são identificadas, segundo o desenho de construção PLS, pelas letras a, b, c e d, de acordo com a tabela 6.19.

Tabela 6.19 Identificação das placas PLS utilizadas nos ensaios

|         |
|---------|
| PLS164a |
| PLS164b |
| PLS164c |
| PLS164d |

- 2) Testar as duas placas principais identificadas por PLP13 montadas com os 4 ligadores disponíveis, identificando-as por um processo semelhante às anteriores e criando-se os subconjuntos PLG mostrados na tabela 6.20.
- 3) Testar os 5 subconjuntos completos, PLS e LIG, montados nas duas placas principais PLP disponíveis, obtendo-se os dez conjuntos CPLP, representados na figura 6.11, mostrados na tabela 6.21.
- 4º Desmontar as peças PLS164 ligadas por parafuso e rebites às respectivas LIG205b e testá-las individualmente, seguindo a identificação mostrada na tabela 6.22.

5º Testar as placas principais PLP13 simples, apresentadas na figura 6.10, seguindo a identificação mostrada na tabela 6.23.

Tabela 6.20 Identificação dos subconjuntos PLG e dos seus constituintes

| Designação do Subconjunto PLG | Placa Principal utilizada | Ligador utilizado |
|-------------------------------|---------------------------|-------------------|
| PLGa                          | PLP13b                    | LIG205b2          |
| PLGb                          | PLP13a                    | LIG205b1          |
| PLGc                          | PLP13b                    | LIG205b1          |
| PLGd                          | PLP13a                    | LIG205b2          |
| PLGe                          | PLP13a                    | LIG205b4          |
| PLGf                          | PLP13b                    | LIG205b3          |
| PLGg                          | PLP13a                    | LIG205b3          |
| PLGh                          | PLP13b                    | LIG205b4          |

Tabela 6.21 Identificação dos conjuntos CPLP e dos seus constituintes

| Designação do Conjunto CPLP | Placa Principal utilizada | Placa secundária montada com ligador |
|-----------------------------|---------------------------|--------------------------------------|
| CPLPa                       | PLP13b                    | PLS164reb al com LIG205              |
| CPLPb                       | PLP13a                    | PLS164M5 com LIG205                  |
| CPLPc                       | PLP13a                    | PLS164reb al com LIG205              |
| CPLPd                       | PLP13b                    | PLS164M5 com LIG205                  |
| CPLPe                       | PLP13b                    | PLS164sol MIG com LIG205             |
| CPLPf                       | PLP13a                    | PLS164sol Pontos com LIG205          |
| CPLPg                       | PLP13b                    | PLS164sol Pontos com LIG205          |
| CPLPh                       | PLP13a                    | PLS164sol MIG com LIG205             |
| CPLPi                       | PLP13b                    | PLS164reb aço com LIG205             |
| CPLPj                       | PLP13a                    | PLS164reb aço com LIG205             |

Tabela 6.22 Identificação das restantes placas PLS

|               |
|---------------|
| PLS164reb aço |
| PLS164reb al  |
| PLS164M5c     |

Tabela 6.23 Identificação das placas PLP

|        |
|--------|
| PLP13a |
| PLP13b |

O posicionamento correcto dos acelerómetros e do local de aplicação da excitação é fundamental para uma recolha eficaz de resultados, uma vez que se está a utilizar um número mínimo de pontos. Os pontos de ligação entre os componentes do subconjunto e a peça secundária são especialmente delicados pois aí se colocam simultaneamente os acelerómetros, sensor de força e se aplica a excitação, bem alinhados. Utilizando pouco

rigor neste alinhamento degrada os resultados, aumentando as dificuldades em obter a regularidade das anti ressonâncias seguidas das ressonâncias no diagrama de Bode. Nas figuras 6.11, 6.12 e 6.13 mostram-se as posições escolhidas para a localização dos acelerômetros nos diversos casos.

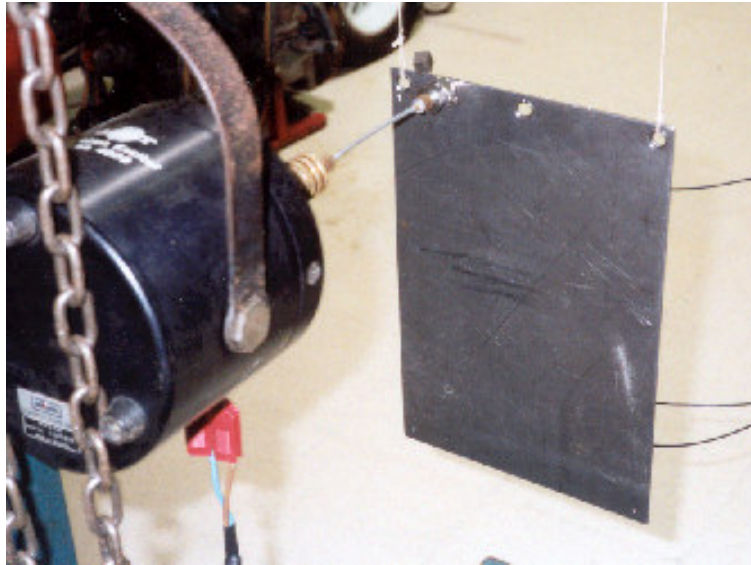


Figura 6.11 Montagem do excitador na placa PLP

Para ensaiar as 4 placas simples PLS disponíveis, colocam-se as 4 bases, de polímero, de alojamento dos acelerômetros e duas de metal para o sensor de força, de acordo com a figura 6.13. Estas bases permitem a desmontagem dos sensores o que facilita a repetibilidade dos testes.

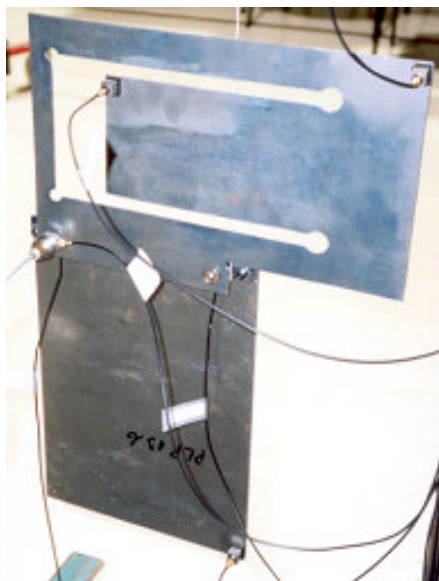


Figura 6.12 Montagem dos sensores no conjunto CPLPa.

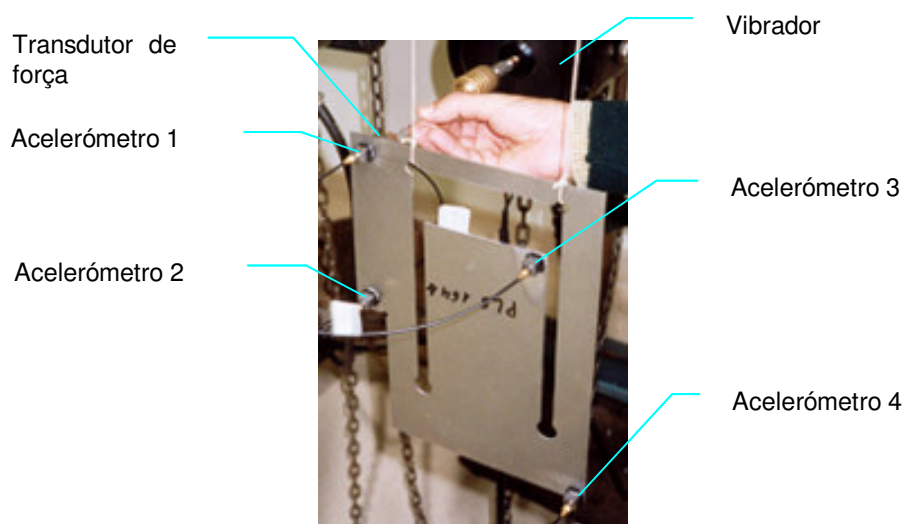


Figura 6.13 Montagem dos sensores nas pls164b

Nos pontos 1 e 2, onde se localizam os acessórios de ligação (parafusos, rebites, etc.), colocam-se duas bases uma de cada lado da placa, respectivamente uma para o sensor de força e outra para o acelerómetro. A colagem destas bases é executada procurando localizá-las nas posições previstas de forma a assegurar um alinhamento satisfatório no sentido que os sensores tenham a sua direcção de medida mais eficiente perpendicularmente à superfície das peças. O processo de colagem está explicado no Apêndice III. Os outros dois acelerómetros são colocados, como planeado, nos cantos mais afastados, pois são os menos afectados pelas linhas nodais. O sensor de força é aplicado alternadamente na direcção do sensor 1 ou na direcção do sensor 2, fazendo deslocar todo o sistema de transmissão de força verticalmente, de modo a que esta se exerça sempre perpendicularmente à superfície da placa.

Como o equipamento de análise de controlo do ensaio só tem disponíveis 4 entradas são preparados dois programas de leitura de dados de resposta e arquivados em ficheiros com as referências apresentadas na tabela 6.24

Tabela 6.24 Referências dos ficheiros com as leituras das FRF

| Acelerómetro | Referência | Ficheiro        |
|--------------|------------|-----------------|
| 1            | 2199114    | PLS164-3Res.pls |
| 2            | 2151456    | PLS164-3Res.pls |
| 3            | 10004      | PLS164-1Res.pls |
| 4            | 2199113    | PLS164-3Res.pls |



Como são utilizados 4 acelerómetros e um transdutor de força, este último colocado alinhado com o acelerómetro 1 ou com o acelerómetro 2, obtêm-se 8 conjuntos de resultados cujo critério de identificação é o seguinte:

$$H_{if_j}$$

em que  $H$  representa a aceleração medida com o acelerómetro na posição de índice  $i$  e o  $f$  o transdutor de força medindo na posição  $j$ . Resulta neste caso o seguinte conjunto de resultados:

$$\begin{array}{cccc} H_1f_1 & H_2f_1 & H_3f_1 & H_4f_1 \\ H_1f_2 & H_2f_2 & H_3f_2 & H_4f_2 \end{array}$$

O vibrador recebe um sinal de excitação aleatória numa gama de frequências escolhida de 0 a 800 Hz.

Na análise dos primeiros resultados, através do gráfico de amplitude em função da frequência, apresentado na figura 6.14, surge uma gama de frequências de ressonância muito baixa, inferior às frequências obtidas nos modelos de elementos finitos, para esta mesma placa. A frequência do primeiro modo de vibração obtida nos modelos de elementos finitos é 14.1 Hz, a que corresponde o modo de vibração apresentado na figura 6.15. Pelo gráfico mostrado na figura 6.14 pode observar-se que uma frequência natural ocorre efectivamente próximo dos 14 Hz, no entanto há outros picos que se localizam a frequências mais baixas. Para se analisar esta divergência envia-se ao vibrador um sinal exactamente com a frequência de 4.5 Hz, correspondente à frequência com maior amplitude de sinal apresentada pelos resultados experimentais. Observa-se por análise visual que esta vibração é de corpo rígido, representada na figura 6.16, provocada pelo sistema de suspensão. Com a utilização do estroboscópio confirma-se com mais clareza esta observação.

Nas restantes frequências de ressonância, comparam-se directamente os resultados experimentais com os de elementos finitos. Procedimento idêntico é feito com as restantes 3 placas Pls164 e posteriormente nas peças destinadas a ser montadas com os parafusos M5 e com os rebites de aço e alumínio. Os resultados obtidos pelo equipamento são apresentados em forma de tabela com as componentes real e imaginária das FRF em

função da frequência. A título de exemplo, mostram-se na tabela 6.25 alguns dos valores obtidos para  $H_1 f_1$  da placa Pls164a.

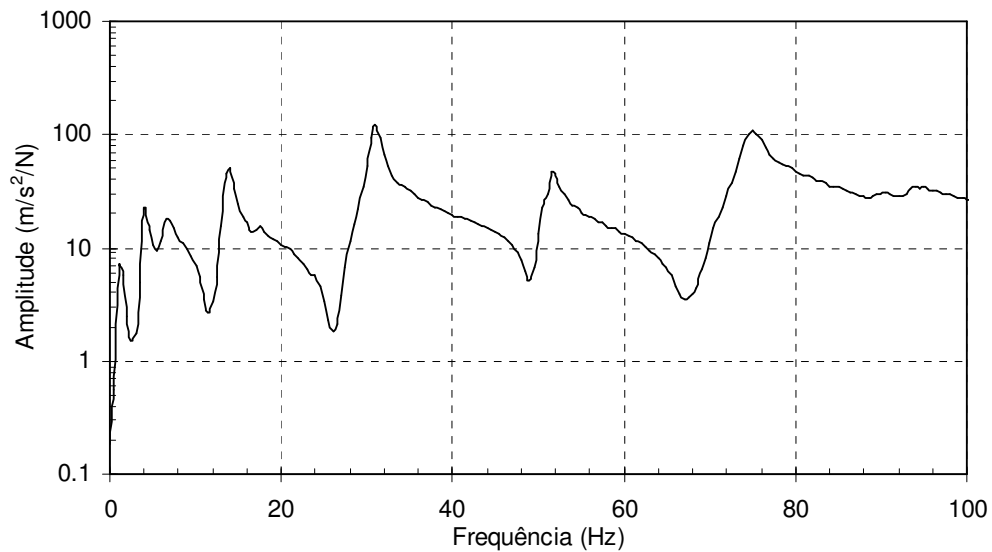


Figura 6.14 Diagrama de Bode obtido no ensaio da placa pls164b ( $H_1 f_1$ )

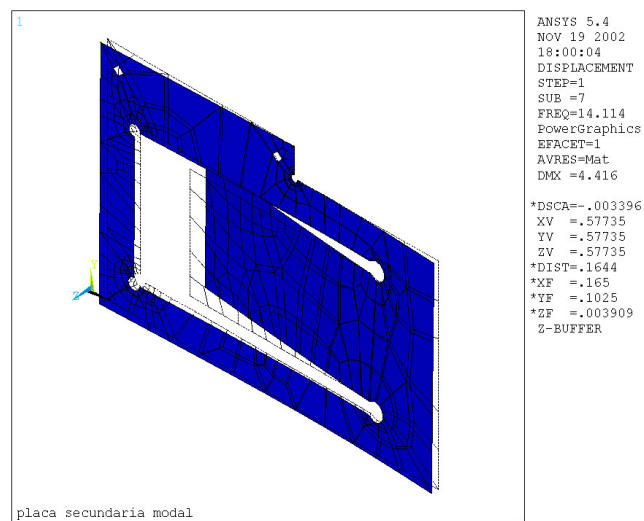


Figura 6.14 Primeiro modo de vibração obtido numericamente na placa pls164 (14.1 Hz)

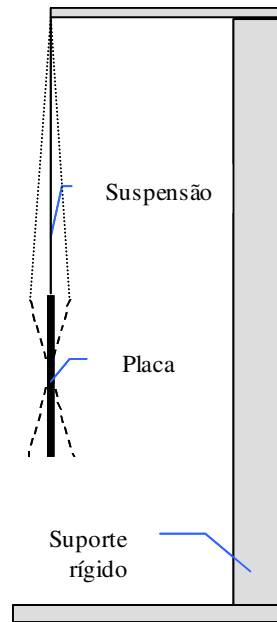


Figura 6.15 Aspecto esquemático do modo de vibração da placa a 4.5 Hz

Com os valores assim obtidos constroem-se gráficos da fase e amplitude para cada placa e para cada conjunto  $H_i f_j$ . Na figura 6.17 mostra-se um exemplo para o caso  $H_2 f_2$  na mesma peça.

Tabela 6.25 Alguns valores obtidos para  $H_1 f_1$  da placa Pls164a

| N.º  | Frequência (Hz)        | Componente Real         | Componente Imaginária   | Amplitude (m/s <sup>2</sup> /N) | Fase (rad.) |
|------|------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|-------------|
| 1    | 0.000 10 <sup>+0</sup> | 1.667 10 <sup>+0</sup>  | 0.000 10 <sup>+0</sup>  | 1.667                           | 0.000       |
| 2    | 5.000 10 <sup>-1</sup> | 2.216 10 <sup>+0</sup>  | -1.042 10 <sup>+0</sup> | 2.449                           | -0.439      |
| 3    | 1.000 10 <sup>+0</sup> | 1.832 10 <sup>+0</sup>  | 8.096 10 <sup>+0</sup>  | 8.301                           | 1.348       |
| 4    | 1.500 10 <sup>+0</sup> | -1.286 10 <sup>+1</sup> | -9.044 10 <sup>-1</sup> | 12.900                          | -3.071      |
|      |                        |                         |                         |                                 |             |
|      |                        |                         |                         |                                 |             |
| 1598 | 7.985 10 <sup>+2</sup> | -1.603 10 <sup>+1</sup> | -4.953 10 <sup>+0</sup> | 16.780                          | -2.841      |
| 1599 | 7.990 10 <sup>+2</sup> | -1.585 10 <sup>+1</sup> | -4.926 10 <sup>+0</sup> | 16.598                          | -2.840      |
| 1600 | 7.995 10 <sup>+2</sup> | -1.564 10 <sup>+1</sup> | -4.892 10 <sup>+0</sup> | 16.394                          | -2.838      |
| 1601 | 8.000 10 <sup>+2</sup> | -1.545 10 <sup>+1</sup> | -4.858 10 <sup>+0</sup> | 16.203                          | -2.837      |

As funções de transferência obtidas são visualizadas através do diagrama de Bode, onde são traçadas a amplitude em escala logarítmica e a fase em relação à frequência. As ressonâncias surgem como máximos locais em forma de picos e as anti-ressonâncias como mínimos locais também acentuados na amplitude, enquanto a fase apresenta variações normalmente acentuadas em ambos os casos.

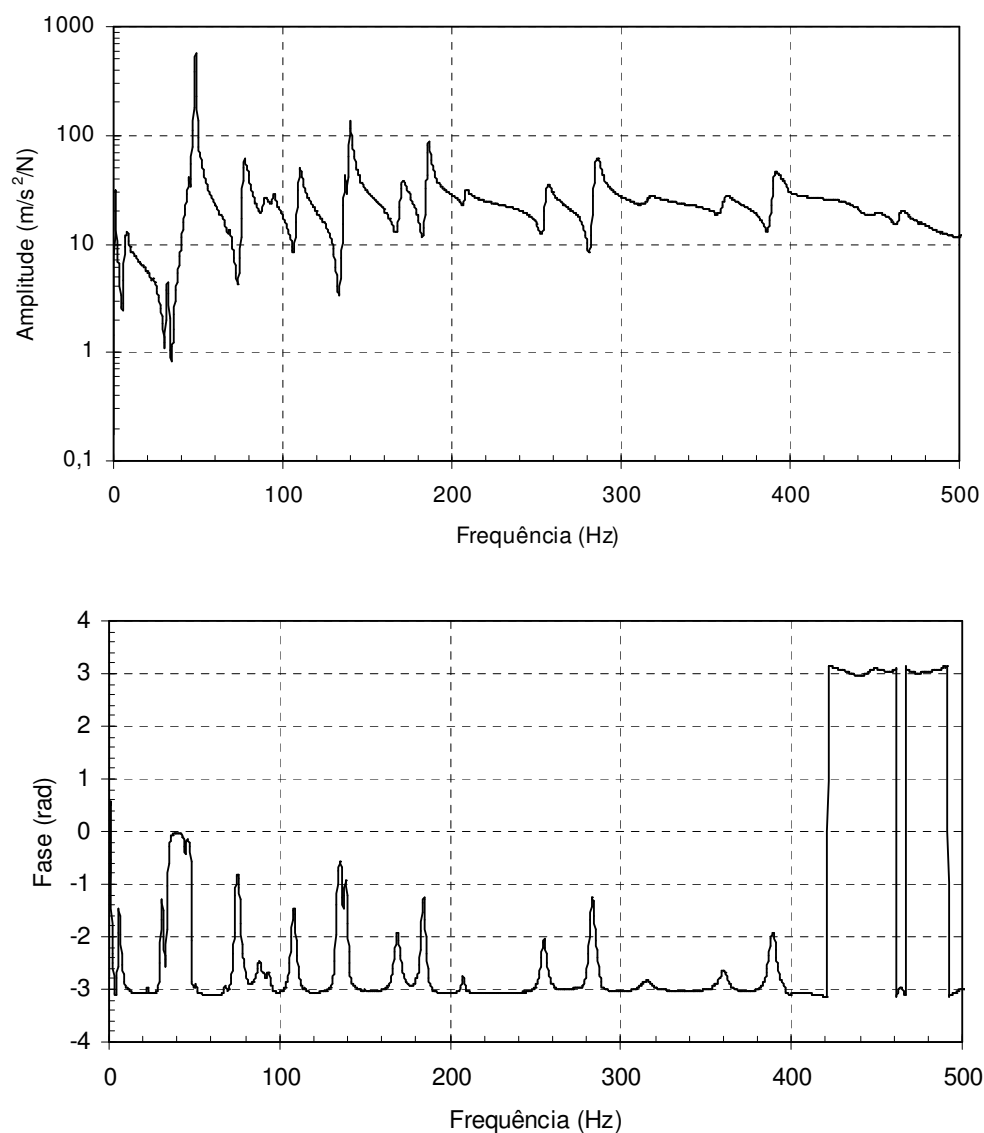


Figura 6.17 Diagramas de amplitude e de fase em função da frequência, obtidos no ensaio da placa Pls164b, conjunto  $H_2f_2$ .

No Ensaio das placas principais montadas nos ligadores disponíveis designadas PLG opta-se pela utilização de 3 acelerómetros, de acordo com as simulações realizadas nos modelos de elementos finitos, montados de acordo com a figura 6.18. Os acelerómetros 1 e 2 aplicam-se, da mesma forma nos pontos de ligação entre peças. No entanto, opta-se por outro tipo de acelerómetro, construído de forma a permitir a sua montagem transversal, para possibilitar a saída do cabo coaxial paralelamente à superfície das peças. O outro acelerómetro é colocado no canto mais afastado assinalado na figura 6.18, como previsto no modelo de elementos finitos. O sensor de força, como no caso anterior, é aplicado alternadamente na direcção do sensor 1 ou na do sensor 2. A forma de suspensão deste

subconjunto é através dos ligadores e a aplicação da excitação passa a ser também nesta peça, como se pode observar na figura 6.19. A mudança de local de suspensão deve-se ao facto de os furos não estarem disponíveis e também o centro de gravidade do conjunto estar localizado sobre a peça de ligação LIG. É utilizado o programa de leitura de dados da placa secundária, apenas modificando o tipo de acelerómetros de leitura, resultando um novo tipo de ficheiro que se mostra na tabela 6.26

Tabela 6.26 Ficheiros correspondentes aos ensaios nas placas PLG

| Acelerómetro | Referência | Ficheiro |
|--------------|------------|----------|
| 1            | 2054321    | PLG.pls  |
| 2            | 2054330    | PLG.pls  |
| 3            | 2199113    | PLG.pls  |

Como são montados 3 acelerómetros e um transdutor de força obtêm-se 6 conjuntos de resultados, para cada montagem.

$$\begin{array}{ccc} H_1 f_1 & H_2 f_1 & H_3 f_1 \\ H_1 f_2 & H_2 f_2 & H_3 f_2 \end{array}$$

Para prosseguir esta fase de obtenção de respostas ensaiam-se os dez conjuntos completos CPLP compostos pelas placas principais montadas nas secundárias, utilizando os vários meios de ligação previstos, isto é, parafusos, rebites e soldaduras.

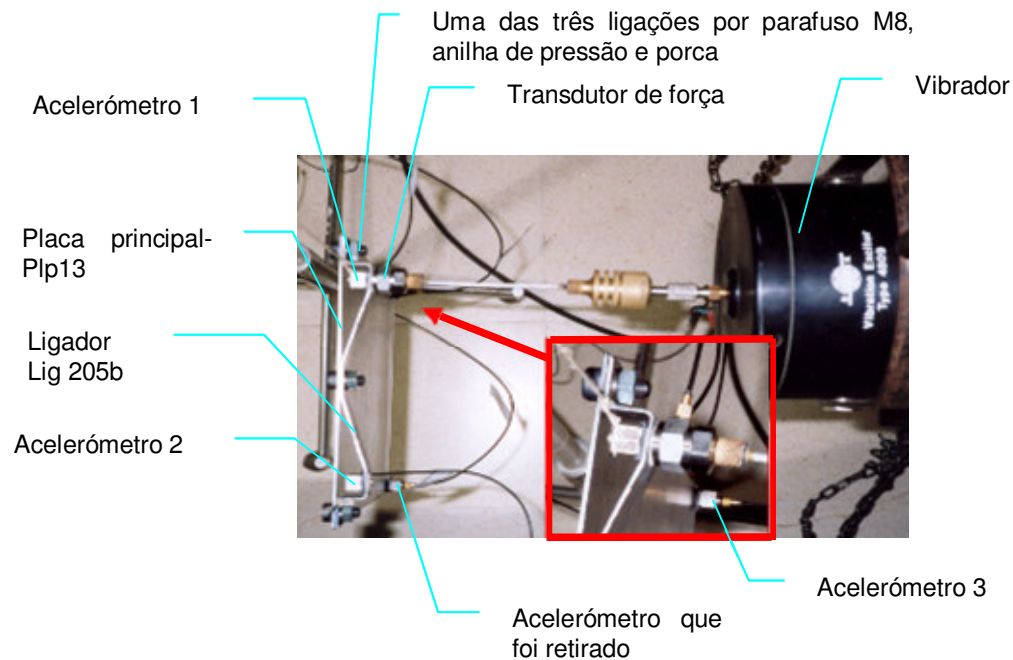


Figura 6.18 Montagem dos sensores nas placas principais montadas com o ligador

Neste caso são utilizados 5 acelerómetros, de acordo com os modelos de elementos finitos e montados tal como apresentado na figura 6.12. Os acelerómetros 1 e 2 aplicam-se, da mesma forma nos pontos de ligação entre peças. Na aplicação das suas bases são coladas agora sobre os elementos de ligação, isto é, sobre os parafusos, rebites e soldaduras, dado que é importante manter o mesmo local de aplicação. Os outros 3 acelerómetros são colocados nos mesmos pontos dos ensaios anteriores. O sensor de força é aplicado da mesma maneira que no caso anterior. A nova designação dos ficheiros de dados correspondentes a estes ensaios é descrita na tabela 6.27

Tabela 6.27 Ficheiros correspondentes aos ensaios nas placas CPLP

| Acelerómetro | Referência | Ficheiro   |
|--------------|------------|------------|
| 1            | 2054321    | Cplp_1.pls |
| 2            | 2054330    | Cplp_1.pls |
| 3            | 2199113    | Cplp_1.pls |
| 4            | 10004      | Cplp_2.pls |
| 5            | 2199114    | Cplp_2.pls |

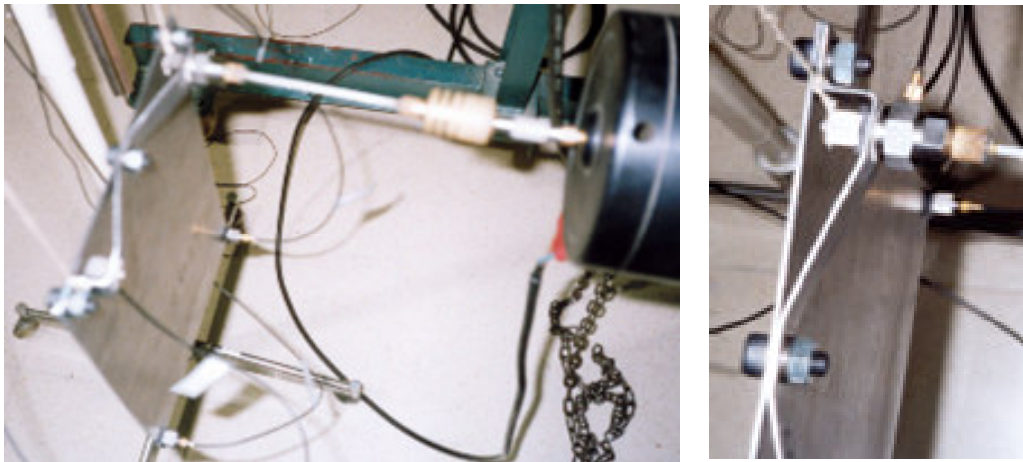


Figura 6.19 Montagem dos sensores no subconjunto PLGa.

Como são usados 5 acelerómetros e um transdutor de força obtêm-se 10 conjuntos de resultados para cada montagem, assim estruturados:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_1f_1 & H_2f_1 & H_3f_1 & H_4f_1 & H_5f_1 \\
 H_1f_2 & H_2f_2 & H_3f_2 & H_4f_2 & H_5f_2
 \end{array}$$

A forma de suspensão do conjunto volta a ser através das peças de ligação LIG, conseguindo-se uma boa estabilidade com as peças na vertical apenas deslizando ligeiramente a posição da suspensão mais para o centro de gravidade da peça de ligação.

Para concluir esta fase de ensaios ensaiam-se as placas principais PLP. Neste caso utilizam-se 3 acelerómetros, montados de acordo com a figura 6.20. O primeiro aplica-se num dos pontos cujo alinhamento coincide com a ligação entre peças. Os outros 2 acelerómetros são colocados no meio da placa e na extremidade, respectivamente. O sensor de força e a excitação são aplicados, como nos casos anteriores, em oposição ao primeiro acelerómetro num dos pontos de ligação entre peças, neste caso o ponto 1. A nova designação dos ficheiros de resultados é descrita como se ilustra na tabela 6.28. Convém notar que o ponto 1, de posicionamento do primeiro acelerómetro, coincide com o ponto de posicionamento do segundo acelerómetro dos ensaios anteriores.

Tabela 6.28 Ficheiros correspondentes aos ensaios nas placas PLP

| Acelerómetro | Referência | Ficheiro |
|--------------|------------|----------|
| 1            | 2054321    | plp.pls  |
| 2            | 2054330    | plp.pls  |
| 3            | 2199113    | plp.pls  |

Como existem 3 acelerómetros e um transdutor de força aplicado num único ponto, obtêm-se 3 conjuntos de resultados, para cada montagem, seguindo a seguinte descrição:

$$H_1f_1 \quad H_2f_1 \quad H_3f_1$$

Um aspecto importante a ter em conta no tratamento destes resultados é a posição de montagem dos sensores durante os vários ensaios. Nas placas, individuais, todos os acelerómetros são colocados de um lado das peças e a excitação e o sensor de força do outro. Nos conjuntos, foi utilizado o ligador como local de excitação e não as placas, pelo que a montagem dos sensores nos pontos 1 e 2 ficou invertida, ou seja, a excitação e os acelerómetros ficaram colocados do mesmo lado das peças, excepto o colocado alinhado com o sensor de força. Então os sinais recebidos por aqueles acelerómetros têm sinais opostos, situação que tem de se ter em conta na identificação modal.

De uma forma geral os dados adquiridos são de boa qualidade. Não se apresentam os diagramas de bode correspondentes aos ensaios realizados devido ao seu grande número. A gama de frequências envolvida é muito extensa, pelo que foi limitada até 250 Hz, de forma a assegurar que as frequências naturais da placa PLP, neste campo, são incluídas nos dados recolhidos. Numa primeira observação sobre os resultados nota-se uma boa aproximação entre as frequências encontradas nos modelos de elementos finitos e as obtidas experimentalmente. Nestes resultados experimentais são encontradas bastantes frequências naturais, em número equivalente às encontradas na análise de elementos finitos, o que não sendo muito comum, significa que com este sistema de excitação e de medida de resultados é possível abranger suficientemente bem a gama de características dinâmicas das peças.

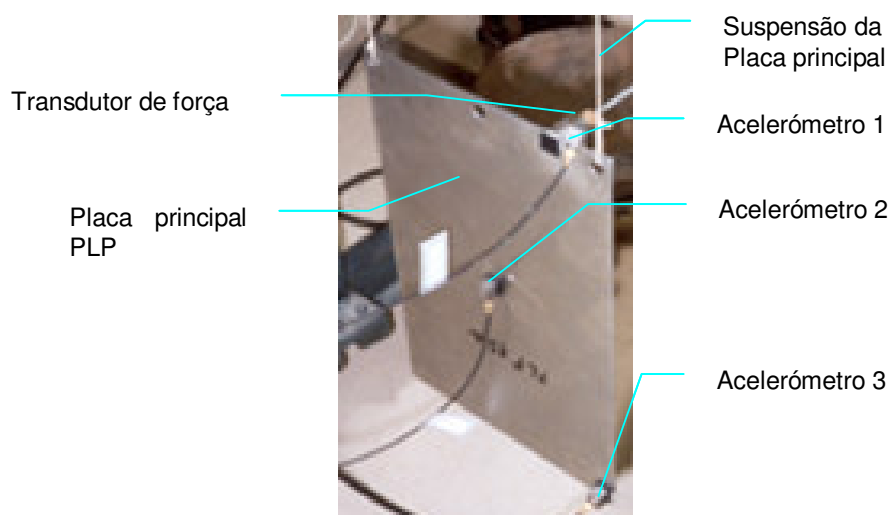


Figura 6.20 Montagem dos sensores nas PLP

Faz-se uma primeira observação dos resultados através da verificação do grau de sobreposição de resultados da amplitude para as diversas peças supostamente iguais. Como exemplo apresenta-se na figura 6.21, a sobreposição dos gráficos de amplitude  $H_1f_1$ , correspondentes aos subconjuntos PLG. Nesta sobreposição são incluídos os gráficos das placas secundárias, sempre com a mesma placa primária. Como só são testadas placas principais já montadas com as peças de ligação, LIG disponíveis, escolhe-se um desses gráficos para o incluir nesta sobreposição, no modelo PLGh, por ser um dos intermédios. Na figura 6.21 pode observar-se uma boa sobreposição de resultados.



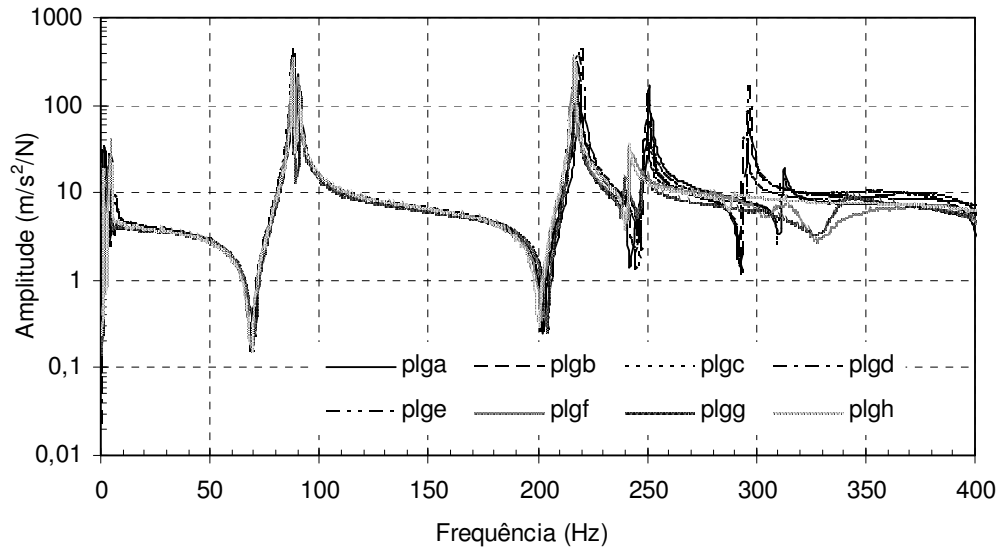


Figura 6.21 Comparação de resultados obtidos com os subconjuntos das placas PLG.

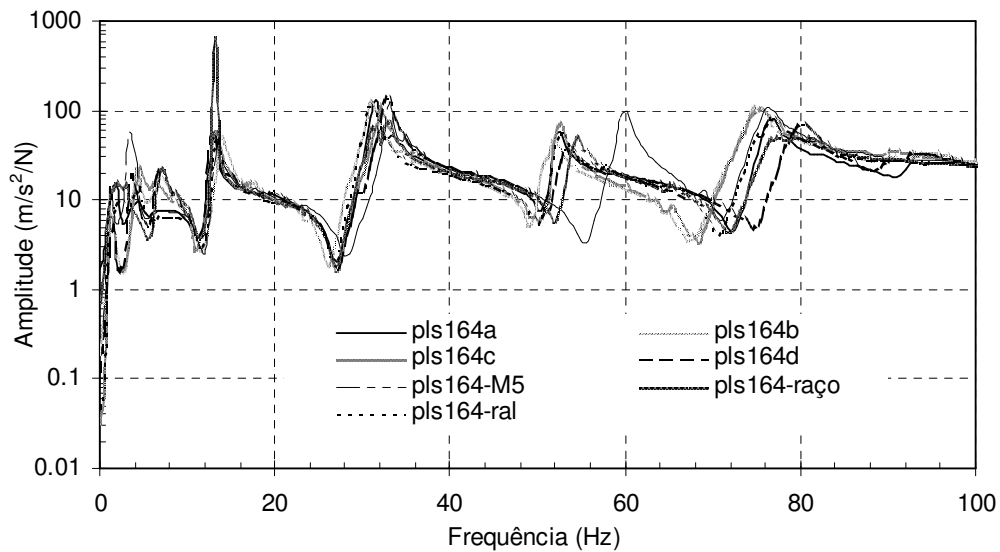


Figura 6.22 Comparação de resultados para as diversas placas secundárias PLS

Na figura 6.22 apresenta-se a mesma análise para as placas secundárias PLS. Nota-se, neste caso um aumento da divergência da frequência de ressonância à medida que as frequências aumentam. O caso particular da placa PLS164-M5 apresenta um desvio maior na zona de 60 Hz. Esta divergência pode ter a ver com pequenos empenos ocorridos nas operações de montagem e desmontagem do componente do seu conjunto. A fixação das peças por parafusos implica sempre a aplicação de um binário de aperto fixo, de acordo

com a recomendação de aperto para este tipo de parafusos, de 6 e 25 Nm para os parafusos M5 e M8, respectivamente.

## 6.5 Tratamento dos Resultados Experimentais. Identificação Modal

Obtidos os valores das FRF nos ensaios experimentais em termos de acelerações importa agora extrair os parâmetros modais. As funções de transferência obtidas são, dependentes das coordenadas escolhidas para excitar e medir a resposta da estrutura. Os parâmetros modais a obter são considerados de dois tipos. Os parâmetros globais como as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento, correspondem aos valores próprios da equação característica do sistema, que são propriedades da estrutura e são, consequentemente, independentes das coordenadas em que se realizam as medições. O segundo tipo são os parâmetros locais, como os modos de vibração, que correspondem aos vectores próprios do sistema e estão intimamente relacionados com as coordenadas utilizadas. A identificação modal trata da determinação dos parâmetros modais a partir das funções de transferência obtidas nos ensaios experimentais.

O programa de identificação BETA existente no laboratório de vibrações do IST (Maia, N. M. M., Silva, J. M. M., Ribeiro, A. M. R., 1995: 366-374) processa um conjunto de funções de transferência simultaneamente. Lê directamente os resultados experimentais obtidos no analisador espectral ligado à cadeia de medição, identifica individualmente cada curva e de forma interactiva calcula as frequências naturais, factores de amortecimento histerético e constantes modais complexas dos vários modos abrangidos pela gama de frequências em estudo.

Antes de apresentar resultados descreve-se sumariamente o funcionamento do programa BETA (Ribeiro, A. M. R., 1999) suas vantagens e inconvenientes. A principal vantagem deste programa e do método que lhe está subjacente, descrito no Capítulo 5, é que possibilita a observação e consequentemente a determinação visual do número de modos na gama de frequências em estudo para que se consiga um modelo adequado do comportamento dinâmico da estrutura. O programa admite uma certa flexibilidade no seu manuseio o que possibilita a intervenção humana nos processos de identificação *SDOF*, mas mantendo a validade global e dos métodos *MIMO*. Com efeito, a confirmação da existência de um modo de vibração no gráfico da FRC é feita pela sobreposição dos valores obtidos a partir das diversas curvas. Pelo contrário, a existência de uma dispersão

dos pontos corresponde a gamas onde não se verifica a dominância de nenhum modo. Mesmo no caso de frequências naturais muito próximas o programa, ao retirar a contribuição dos modos vizinhos subtraindo o efeito dos modos contíguos já identificados, permite a obtenção de resultados mais correctos.

Na vizinhança de cada modo, a representação gráfica da inversa da função representada pela equação (5.35) apresenta na parte real um troço de recta com declive unitário decrescente que cruza o eixo das abcissas para  $\omega^2 = \omega_r^2$ . Este é o processo utilizado para sintonizar a observação da correcta coincidência da zona da curva de transferência a identificar com uma linha de referência e assim obter o valor da frequência natural correspondente. Por sua vez, na parte imaginária, um troço de recta horizontal formada por pontos coincidentes da curva de transferência, com ordenada igual ao produto  $\eta_r \omega_r^2$  está também coincidente com a respectiva linha de referência. Quando estas condições acontecem, é possível solicitar ao programa o calculo da frequência de ressonância e o factor de amortecimento histerético do modo em causa. É a observação destes troços de recta que permite evidenciar a existência dos modos, dado que, fora da vizinhança das ressonâncias, existem apenas manchas de pontos.

Calculados os parâmetros globais, para cada par de pontos  $(\omega_1, \alpha_1)$  e  $(\omega_2, \alpha_2)$ , obtém-se de seguida o valor complexo da constante modal do modo  $r$ ; na vizinhança de cada modo. O princípio assenta no facto de que a média entre os vários valores dos pares de pontos assim obtidos deve dar uma estimativa razoável do valor pretendido e todos devem conduzir ao mesmo resultado.

O programa permite, em cada modo, seleccionar, sobre uma faixa com declive  $-1$ , ajustável através do comando da largura de banda, a gama de pontos que se deseja incluir, utilizando a parte real do gráfico da inversa da FRC (gráfico  $1/\beta$ ). Adicionalmente é ainda possível corrigir, manualmente, os valores obtidos, de forma a que cada curva regenerada fique ainda mais aproximada. No entanto o que se verifica na utilização é que o programa não dá sempre a mesma resposta tanto na frequência natural como também no valor dos modos de vibração. A situação mais grave é nos modos de vibração cujos resultados variam consideravelmente. A forma de seleccionar o ponto na função  $1/\beta$  já de si não é rigorosa pois a escala com que os sucessivos pontos aparecem é relativamente pequena. O programa permite ampliar a sua escala dentro de limites relativamente curtos que

facilmente podem ser ultrapassados. Se ampliar pouco a sintonia no ponto de intercepção é susceptível de erro de ajustamento aos pontos, pois o programa tem uma sensibilidade variável com a escala de amplificação e só na escala máxima existe a garantia de correcção no posicionamento. Isto significa a possibilidade de obter o resultado da frequência natural com uma precisão de  $\pm 1$  Hz, no caso específico deste trabalho. Estando a analisar baixas frequências, na ordem dos 10 Hz este erro não é de desprezável.

Por sua vez utilizando ampliações diferentes podem obter-se modos de vibração consideravelmente diferentes. Surgem alguns casos em que, após o procedimento recomendado, isolando o conjunto de pontos seleccionado e calculando, os modos obtidos reflectem uma divergência de forma significativa e consequentemente um modo de vibração com forma muito diferente dos outros. Esta situação pode conduzir a dificuldades no melhoramento do modelo de elementos finitos que não podem ser imputadas ao modelo de elementos finitos a melhorar. Situação idêntica coloca-se utilizando apenas uma parte dos pontos seleccionados. O controlo deste problema é difícil porque os valores das constantes modais calculadas pelo programa são muito elevados, em forma complexa e difíceis de ajuizar da sua qualidade antes de serem transformados pelas equações (5.13) e adimensionalizados para se poderem comparar através do *MAC* com os resultados obtidos no modelo a melhorar. Este problema é contornado utilizando a informação resultante do cálculo da razão do amortecimento. O amortecimento esperado para os protótipos experimentais aqui utilizados é baixo e aproximadamente constante para todas as análises. Partindo desta observação, só são aceitáveis os resultados que apresentem níveis baixos de coeficientes de amortecimento e nestas condições a repetibilidade dos resultados obtidos nos modos de vibração é muito maior.

Outro problema que se põe, principalmente na primeira frequência, da ordem dos 11 Hz, é o pequeno conjunto de pontos que é utilizado na identificação modal, só identificáveis na máxima ampliação permitida pelo programa, mas que não são suficientes para que a identificação se dê com clareza, mesmo utilizando a banda de selecção mais larga. Assim, neste caso, o resultado obtido numa das coordenadas de medida é muitas vezes zero, o que não corresponde à realidade. Nestas ocasiões, repete-se a análise várias vezes, sempre mantendo controlado o resultado do amortecimento, até aparecerem valores aceitáveis em todas as coordenadas.

Em resumo, o programa BETA tem limitações que são contornáveis através das metodologias propostas, permitindo que se obtenham resultados com algum controlo. Com outros programas estes modos de vibração são muitas vezes ignorados, o que pode tornar a sua aplicação na investigação mais limitada. Uma descrição mais detalhada da obtenção dos resultados através do programa BETA é apresentada em Ribeiro (1999).

Começando pelas placas PLP, os resultados da identificação das frequências naturais e dos modos de vibração são os representados na tabela 6.29. A escolha dos resultados experimentais segue o princípio já exposto, ou seja, a procura de resultados assenta primeiro numa sintonização na frequência fazendo uma maior ampliação da imagem sobreposta apresentada pelos pontos no gráfico da receptância, no ponto de cada pico. Se o amortecimento for elevado, maior que 0.005, alarga-se a banda de envolvimento de pontos para ver se o amortecimento baixa. Paralelamente, observa-se a sobreposição da linha horizontal de referência da fase sobre os pontos alvo da selecção. Se esta linha estiver abaixo da mancha de pontos então o amortecimento considerado é muito elevado e devem-se procurar outras hipóteses, para além da largura da banda, pode-se utilizar outro *salto* ou fazer a sintonia um pouco ao lado do valor entretanto seleccionado para se tentar um melhor ajustamento. Normalmente, nestes casos, quanto menor for o amortecimento melhor será a semelhança entre as formas do modo calculadas e o real. No caso da análise desta placa a razão de amortecimento média encontrada foi de 0.0035. Nos subconjuntos PLG procede-se da mesma forma, obtendo-se os resultados apresentados nas tabelas 6.30 a 6.37.

Tabela 6.29 Resultados obtidos após identificação modal da peça PLP

| Modelo PLPa   |                      |         |         | Modelo PLPb   |                      |         |         |
|---------------|----------------------|---------|---------|---------------|----------------------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz] | Deslocamentos nodais |         |         | $\omega$ [Hz] | Deslocamentos nodais |         |         |
|               | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |               | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |
| 94.1          | 1.527                | -0.919  | -2.365  | 93.4          | -2.383               | 0.490   | 1.729   |
| 100.5         | 1.945                | -0.962  | 1.077   | 99.4          | 1.161                | -1.388  | 3.263   |
| 215.7         | -4.833               | 0.267   | -5.868  | 214.5         | -4.395               | -0.304  | -6.197  |
| 244.5         | -1.625               | -3.225  | 3.077   | 246.1         | -0.805               | -1.570  | 2.077   |
| 276.7         | -3.243               | 1.949   | -0.613  | 282.7         | 3.970                | -2.892  | 0.338   |
| 320.1         | -2.939               | -0.107  | 8.818   | 327.5         | -5.036               | -0.834  | 17.713  |

Em todos os modelos pode-se observar uma grande proximidade entre as duas primeiras frequências naturais, o que dificulta a separação dos pontos das curvas de transferência associados a cada modo de vibração na extracção dos deslocamentos nodais. A quase sobreposição destes dois modos pode ver-se claramente na figura 6.23, onde se

representam as curvas das funções de transferência ( $\alpha$ ) obtidas na placa PLGb, pontos azuis-escuros, e a respectiva curva de mobilidade gerada, azul claro. Na parte superior da figura mostra-se a evolução da amplitude e na inferior a evolução da fase.

Tabela 6.30 Resultados obtidos após identificação modal dos subconjuntos PLGa

| Excitação em f1 |                      |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |
| 87.1            | 1.170                | -0.913  | 1.686   | 86.1            | 1.257                | -1.690  | -3.148  |
| 90.1            | -0.992               | -1.315  | 2.653   | 91.03           | 1.539                | 0.217   | -0.164  |
| 217.6           | 2.577                | -1.987  | -6.504  | 216.3           | 1.825                | -2.631  | 6.569   |
| 240.8           | -1.182               | -2.201  | 1.598   | 241.3           | 2.445                | 1.509   | 3.394   |
| 251.2           | -2.482               | -3.401  | -3.755  | 251.8           | -2.987               | -1.039  | -0.943  |
| 312.6           | -1.133               | -1.253  | -10.131 | 314.4           | -2.078               | -0.787  | 10.160  |

Tabela 6.31 Resultados obtidos após identificação modal dos subconjuntos PLGb

| Excitação em f1 |                      |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |
| 88.0            | 1.563                | -1.305  | -2.259  | 87              | 1.238                | -1.832  | -3.210  |
| 90.4            | 0.785                | 1.152   | 1.830   | 91.8            | 1.453                | 0.479   | 1.528   |
| 218.2           | -2.553               | 1.895   | -7.081  | 218.9           | 1.844                | -2.993  | 6.428   |
| 241.1           | 0.556                | -3.609  | 1.064   | 237.9           | -2.343               | -1.352  | -1.867  |
| 249.3           | -1.421               | -2.899  | 3.405   | 249.8           | 3.178                | 1.561   | -0.613  |
| 294.7           | 1.474                | 1.935   | -10.694 | 297.6           | -2.470               | -1.138  | 7.625   |

Tabela 6.32 Resultados obtidos após identificação modal dos subconjuntos PLGc

| Excitação em f1 |                      |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |
| 86.8            | 1.383                | -1.331  | -2.334  | 85.8            | 1.629                | -1.804  | -3.059  |
| 89.8            | 1.004                | 1.669   | 2.610   | 91.3            | -3.070               | -0.378  | -0.426  |
| 216.1           | -2.341               | 2.324   | -7.279  | 215.1           | 1.685                | 2.191   | 7.759   |
| 239.1           | -0.495               | -1.787  | -0.938  | 237.5           | 1.711                | 1.208   | 2.691   |
| 250.5           | -1.621               | -3.183  | 3.282   | 252.7           | -3.175               | -1.562  | -0.433  |
| 311.5           | 1.103                | 1.480   | -14.510 | 313.6           | 1.706                | 0.631   | -8.496  |

Tabela 6.33 Resultados obtidos após identificação modal dos subconjuntos PLGd

| Excitação em f1 |                      |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |
| 87.0            | 1.346                | -1.533  | -2.535  | 87.1            | -1.312               | 1.717   | 3.075   |
| 89.8            | 1.195                | 1.182   | 1.881   | 91.8            | 1.535                | 0.145   | 0.236   |
| 216.1           | -2.653               | 2.020   | -7.477  | 218.4           | 2.033                | 2.341   | 6.972   |
| 239.2           | -2.163               | -3.495  | 3.476   | 240.2           | 2.258                | 1.552   | 3.222   |
| 250.5           | -2.059               | -3.205  | 4.002   | 249.2           | 1.315                | 0.590   | 0.328   |
| 311.7           | 1.845                | 1.871   | -10.428 | 299             | 0.833                | 1.858   | -2.562  |

Tabela 6.34 Resultados obtidos após identificação modal dos subconjuntos PLGe

| Excitação em f1 |                      |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |
| 88.4            | 1.354                | -1.333  | -2.346  | 87              | -1.307               | 1.723   | 3.204   |
| 90.8            | 1.173                | 1.013   | 1.541   | 91.6            | 1.160                | 0.435   | 0.171   |
| 220.2           | -2.615               | 1.927   | -7.770  | 220.3           | -1.966               | -2.441  | -7.176  |
| 239.5           | -0.569               | -4.486  | -1.582  | 237.2           | 1.609                | 1.156   | 2.647   |
| 250.5           | -1.479               | -2.691  | 3.542   | 249.8           | 2.095                | 1.083   | 0.647   |
| 297.1           | -1.789               | -1.992  | 10.912  | 298.6           | 2.342                | 0.815   | -8.050  |

Tabela 6.35 Resultados obtidos após identificação modal dos subconjuntos PLGf

| Excitação em f1 |                      |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |
| 86.8            | 1.373                | -1.419  | -2.521  | 85.4            | -0.682               | 1.630   | 3.093   |
| 89.5            | 1.207                | 1.296   | 1.760   | 91.1            | 0.780                | 0.235   | 0.351   |
| 215.7           | -2.638               | 2.138   | -6.838  | 215.6           | -2.159               | -2.668  | -7.390  |
| 233.3           | -0.565               | 2.866   | 11.109  | 237.8           | 1.718                | 1.401   | 3.482   |
| 242.9           | -1.720               | -2.395  | 0.863   | 253.4           | 2.948                | 1.642   | 0.643   |
| 317.8           | -2.315               | -1.849  | 6.686   | 314.1           | 2.355                | 0.936   | -11.625 |

Tabela 6.36 Resultados obtidos após identificação modal dos subconjuntos PLGg

| Excitação em f1 |                      |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |
| 86.9            | 1.331                | -1.448  | -2.605  | 85.7            | -0.988               | 1.627   | 3.171   |
| 90.6            | 1.084                | 1.081   | 1.756   | 91.9            | 1.863                | 0.462   | 0.866   |
| 216.9           | -2.366               | 1.995   | -6.508  | 216.2           | -1.844               | -2.408  | -7.009  |
| 239.3           | -0.580               | -4.914  | -1.496  | 239.4           | -2.698               | -0.642  | -3.396  |
| 247.3           | -0.721               | -1.836  | 21.023  | 253.8           | 3.396                | 1.151   | 0.314   |
| 337.7           | -0.348               | -0.631  | 1.723   | 312.2           | -4.037               | 0.469   | 21.766  |

Tabela 6.37 Resultados obtidos após identificação modal dos subconjuntos PLGh

| Excitação em f1 |                      |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 |
| 87.5            | 1.641                | -1.224  | -2.094  | 86.2            | -0.544               | 1.663   | 2.454   |
| 90.2            | 1.122                | 1.115   | 1.750   | 91.1            | 0.435                | -0.343  | 14.347  |
| 216.2           | -2.821               | 2.098   | -7.713  | 217.5           | -2.335               | -2.638  | -7.763  |
| 241.3           | -1.296               | -5.802  | 2.379   | 237             | 2.236                | 1.553   | 4.378   |
| 254.6           | 0.058                | 0.101   | 213.403 | 248.8           | 1.937                | 1.066   | 0.623   |
| 287.7           | -0.601               | -1.532  | 20.844  | 298.1           | 2.681                | 1.158   | -8.155  |

Na obtenção dos deslocamentos nodais troca-se o sinal correspondente ao ponto 3, mostrado na figura 6.18, devido à forma como é colocado o acelerómetro na peça, na face

oposta à utilizada no modelo de elementos finitos, como já foi referido. A razão de amortecimento média encontrada é de 0.0055. Na figura 6.24 pode observar-se a pouca visibilidade da linha de distribuição dos pontos obtidos experimentalmente na configuração  $1/\beta$ , para as duas primeira frequências naturais, o que dificulta a identificação destes modos de vibração.

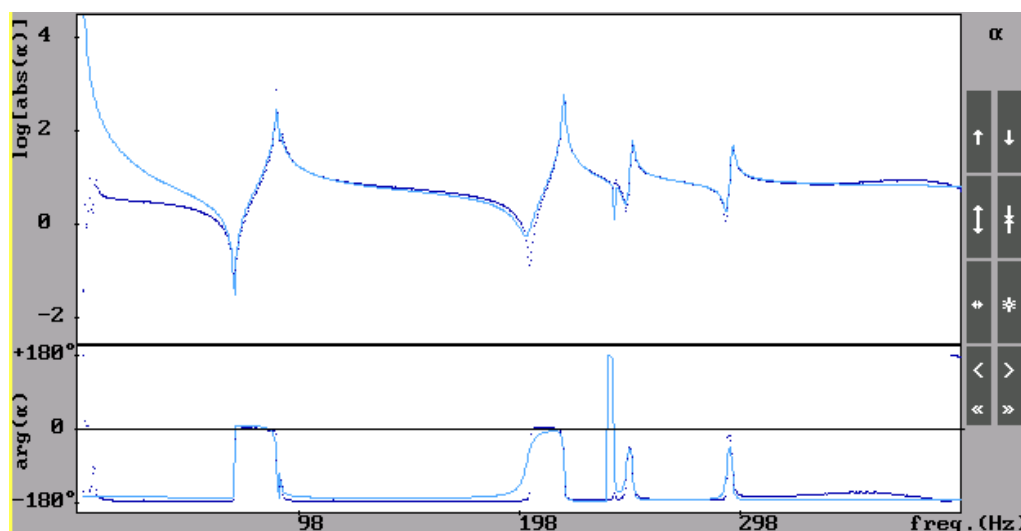


Figura 6.23 Representação gráfica das curvas das funções  $\alpha$  obtidas na placa PLGb. As duas primeiras frequências naturais, a cerca de 90 Hz, quase se sobrepõem.

Para a placa PLS utiliza-se um procedimento idêntico, obtendo-se os resultados apresentados nas tabelas 6.38 a 6.40. Pode-se observar uma maior diferença de resultados para os dois casos de excitação, notando-se, nas frequências naturais, uma diferença que chega a ser de 5 Hz. Fazendo uma comparação por observação entre estes resultados nos deslocamentos nodais e os obtidos no modelo de elementos finitos, fica-se com a ideia que os modelos com excitação em f2 apresentam resultados de qualidade inferior no que respeita à primeira frequência. Em compensação na terceira frequência, o valor encontrado em f2 é mais próximo da frequência obtida numericamente. A razão de amortecimento média encontrada foi de 0.04, bastante superior à dos modelos precedentes.

Da mesma forma procedeu-se à identificação de três conjuntos CPLP, envolvendo a ligação por parafuso M5 e rebite de alumínio, com diâmetro de 5 mm. Nas tabelas 6.41 a 6.43, apresentam-se os resultados obtidos.



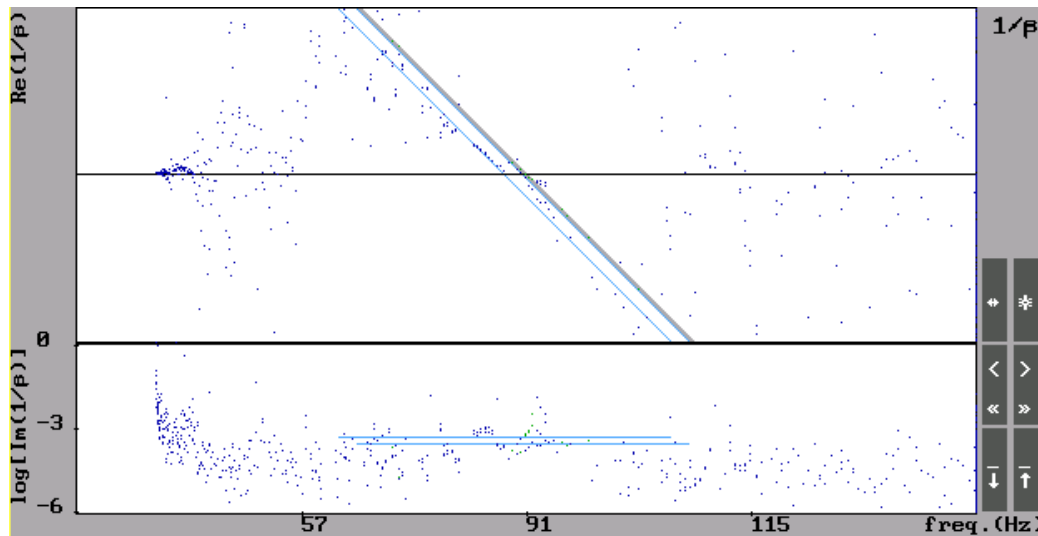


Figura 6.24 Representação gráfica das curvas das funções  $1/\beta$  obtidas na placa PLGb. As duas primeiras frequências naturais, a cerca de 90 Hz, quase se sobrepõem.

Tabela 6.38 Resultados obtidos na análise modal da placa PLS com ligação por parafuso M5

| Excitação em f1 |                      |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |
| 13.5            | 0.211                | -0.002  | -0.481  | 0.061   | 13.7            | 0.526                | -0.096  | 4.515   | -0.444  |
| 33.4            | 0.690                | -0.203  | 0.628   | 1.079   | 35.7            | -2.086               | -0.167  | -1.816  | -2.596  |
| 59.8            | -0.847               | 2.171   | -0.235  | -0.438  | 57              | 3.752                | -4.735  | 0.409   | 1.179   |
| 75.9            | -1.572               | 1.217   | 0.694   | 1.504   | 79.8            | -12.537              | 2.255   | 2.223   | 4.351   |
| 94.4            | -0.335               | -0.616  | 2.254   | -3.005  | 94.1            | 0.591                | 2.102   | -4.848  | 9.052   |
| 108.2           | 0.660                | 1.878   | -2.313  | -0.201  | 108.1           | 3.701                | 2.451   | -7.480  | -1.279  |

Tabela 6.39 Resultados obtidos na análise modal da placa PLS com ligação por rebite de diâmetro 5 mm

| Excitação em f1 |                      |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |
| 13.3            | 0.196                | -0.035  | -0.310  | 0.146   | 13.1            | -0.082               | -0.126  | 0.192   | -0.023  |
| 30.8            | -0.637               | 0.144   | -0.515  | -0.885  | 32.4            | 3.408                | -0.822  | 1.129   | 1.817   |
| 52.4            | 0.612                | -1.574  | 0.137   | 0.198   | 49.2            | 2.351                | -3.934  | 0.041   | 0.130   |
| 76              | 1.547                | -1.073  | -1.136  | -2.046  | 78.9            | -5.984               | 3.021   | 3.948   | 7.457   |
| 95.2            | -0.258               | -0.310  | 1.369   | -2.825  | 94.8            | -3.952               | -4.396  | 5.681   | 0.494   |
| 108.8           | 0.715                | 1.030   | -1.675  | -0.427  | 108.4           | 3.008                | 2.593   | -4.165  | -1.407  |

No subconjunto PLG, devido à forma como são montados os acelerômetros nos pontos 3, 4 e 5 das peças, do mesmo lado que a aplicação da excitação e portanto ao

contrário do incluído no modelo de elementos finitos, na identificação modal trocam-se os sinais nos valores correspondentes a esses três pontos. Nota-se uma melhor correlação entre as frequências naturais encontradas nestes modelos, comparando os resultados para cada local de excitação no mesmo modelo. Mas a nível dos deslocamentos nodais há uma menor semelhança em termos da forma dos modos de vibração.

Tabela 6.40 Resultados obtidos na análise modal da placa PLS com ligação por rebite de diâmetro 4 mm

| Excitação em f1 |                      |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 |
| 12.5            | 0.140                | 0.071   | -0.244  | 0.059   | 12.8            | 0.875                | 0.446   | -1.037  | 0.367   |
| 32.1            | -0.488               | 0.176   | -0.411  | -0.973  | 33              | 2.405                | -0.550  | 1.014   | 2.177   |
| 54.2            | 0.407                | -1.266  | 0.043   | 0.115   | 50.2            | 2.475                | -4.980  | -0.353  | 0.146   |
| 76.6            | 1.089                | -0.994  | -0.877  | -1.151  | 81.2            | -6.707               | 3.142   | 3.238   | 6.134   |
| 96.4            | 0.162                | 3.144   | -32.834 | 3.415   | 94.5            | 0.634                | 1.541   | -4.202  | 5.629   |
| 108.7           | 0.480                | 0.947   | -2.057  | -0.394  | 108.5           | 3.479                | 2.264   | -5.245  | -1.579  |

Tabela 6.41 Resultados obtidos após identificação modal do conjunto CPLPb com ligação por parafuso M5

| Excitação em f1 |                      |         |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |
| 10.5            | -0.062               | 0.057   | -0.008  | -0.304  | 0.274   | 11.3            | -0.006               | 0.076   | -0.038  | -1.528  | 0.816   |
| 12.8            | 0.218                | 0.036   | -0.056  | -0.191  | -0.147  | 13.9            | 0.049                | -0.099  | -0.027  | 0.456   | 0.581   |
| 26.2            | 0.073                | -0.093  | 0.154   | -0.149  | -0.227  | 26.9            | -0.039               | 0.124   | -0.080  | 0.272   | 0.186   |
| 44.8            | 0.168                | 0.052   | 0.040   | 0.330   | 0.401   | 44.6            | 0.263                | 0.071   | 0.067   | 0.438   | 0.644   |
| 72.7            | 0.126                | -0.199  | -0.523  | -0.843  | -1.018  | 72.4            | -0.096               | 0.175   | 0.542   | 0.936   | 1.159   |
| 89.3            | 0.349                | 0.234   | 0.601   | -0.676  | 0.097   | 82.4            | 0.126                | 0.489   | 1.084   | -0.560  | -0.346  |

Tabela 6.42 Resultados obtidos após identificação modal do conjunto CPLPa com ligação por rebite de alumínio

| Excitação em f1 |                      |         |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |
| 12.8            | 0.120                | 0.026   | -0.023  | -0.193  | 0.144   | 11.5            | -0.008               | 0.051   | -0.037  | -0.243  | 0.353   |
| 13.3            | 0.101                | 0.042   | -0.044  | -0.131  | -0.213  | 13.5            | 0.082                | 0.052   | -0.041  | -0.140  | -0.124  |
| 26.3            | 0.075                | -0.092  | 0.159   | -0.185  | -0.180  | 26.2            | -0.054               | 0.074   | -0.137  | 0.179   | 0.187   |
| 44.9            | 0.168                | 0.053   | 0.046   | 0.354   | 0.456   | 45.0            | 0.175                | 0.070   | 0.050   | 0.409   | 0.508   |
| 72.8            | 0.107                | -0.160  | -0.505  | -0.686  | -0.812  | 72.7            | -0.049               | 0.168   | 0.495   | 0.572   | 0.874   |
| 89.3            | 0.686                | -0.270  | -1.115  | 0.954   | 0.978   | 84.0            | 0.783                | 0.602   | 1.454   | -0.612  | -0.401  |

As primeiras duas frequências naturais são, mais uma vez, muito próximas, o que dificulta a separação dos pontos envolvidos na identificação de cada uma e

consequentemente na extracção dos valores modais. A razão de amortecimento média encontrada de 0.015 é bastante elevada.

Tabela 6.43 Resultados obtidos após identificação modal do conjunto CPLPc com ligação por rebite de alumínio

| Excitação em f1 |                      |         |         |         |         | Excitação em f2 |                      |         |         |         |         |
|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|-----------------|----------------------|---------|---------|---------|---------|
| $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         | $\omega$ [Hz]   | Deslocamentos nodais |         |         |         |         |
|                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |                 | Ponto 1              | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |
| 11.4            | -0.175               | 0.070   | -0.056  | -0.111  | 0.378   | 11.3            | 0.021                | 0.051   | -0.056  | -0.282  | 0.085   |
| 13.7            | 0.094                | 0.039   | -0.036  | -0.119  | -0.246  | 13.8            | 0.140                | 0.035   | -0.026  | -0.126  | -0.230  |
| 25.3            | 0.063                | -0.093  | 0.173   | -0.164  | -0.188  | 25.3            | -0.090               | 0.067   | -0.123  | 0.152   | 0.162   |
| 44.9            | 0.179                | 0.071   | 0.039   | 0.367   | 0.474   | 44.9            | 0.182                | 0.080   | 0.044   | 0.421   | 0.498   |
| 72.0            | 0.106                | -0.147  | -0.327  | -0.495  | -0.583  | 71.7            | 0.073                | 0.129   | 0.516   | 0.618   | 0.947   |
| 85.5            | -0.163               | 0.741   | 1.359   | -0.826  | -0.826  | 84.6            | -0.038               | 0.529   | 1.185   | -0.582  | -0.440  |

Concluída a identificação modal dos protótipos experimentais ensaiados, pode-se concluir que apesar das limitações dos equipamentos e dos processos empregues, é possível obter um conjunto de resultados que aparentam ser credíveis, principalmente comparando o valor das frequências naturais respectivas. Nota-se que os sensores intervêm significativamente nos resultados, e também por isso é maior a dificuldade em identificar as curvas das funções de transferência obtidas, principalmente para as baixas frequências. O programa de identificação modal, com a sua possibilidade de visualização do processo de cálculo e a possibilidade de intervenção manual permite obter resultados que não são facilmente conseguidos por processos de identificação mais automatizados. Peca, no entanto, pela sua potencial falta de rigor e também porque não possibilitar transferir os resultados para outros programas, operação que é realizada manualmente.

## 6.6 Sumário e Discussão dos Resultados

Foram estudados e escolhidos os modelos dos protótipos formados por conjuntos de placas, permitindo a análise de vários tipos de ligadores. Optou-se por escolher como forma principal placas planas finas, por uma questão de simplicidade, partindo-se do princípio que são um bom ponto de partida para se conseguir obter resultados experimentais não afectados por efeitos secundários devidos à complexidade da estrutura. Algumas conclusões foram tiradas durante a descrição das metodologias utilizadas. Foram definidos modelos de elementos finitos rigorosos no programa escolhido, o ANSYS, por ser um código comercial paramétrico adequado para dinâmica de estruturas. Na modelação das peças foram definidas várias variáveis a partir das propriedades mecânicas do material

das peças e dos seus parâmetros geométrico para possibilitar o processo de melhoramento dos modelos. Os resultados obtidos são sensíveis às pequenas variações geométricas provocadas pelas diferentes formas de montagem, o que representa uma boa perspectiva para o melhoramento dos seus resultados. Na modelação das peças foi considerada a afectação da massa dos diversos sensores aplicados nos modelos reais. Pode observar-se que esta massa tem uma influência significativa nos resultados, o que vai complicar o processo de melhoramento, pois aparenta ser da mesma ordem de grandeza que a provocada pela utilização das diferentes formas de ligação entre peças. Notou-se que essa influência era menor nos modelos de maior massa, obtendo-se diferenças assinaláveis na peça mais leve. Esse problema é reduzido utilizando-se equipamento de medida óptico, onde as leituras podem ser feitas sem contacto físico. Apesar das diferenças encontradas, os modos de vibração mantêm-se com o mesmo aspecto geral, variando apenas a intensidade dos deslocamentos nodais.

Foram ensaiados os protótipos experimentais. Nos conjuntos soldados as soldaduras foram executadas antes do ensaio das peças simples, para que essa operação fosse feita por especialistas, já que exige uma boa qualidade de fabricação. Os resultados permitiram obter diagramas de amplitude e fase bem formados, na gama de frequências pretendida entre 0 e 250Hz. Foram sobrepostas algumas curvas de receptância e comparadas as frequências naturais entre os vários protótipos, tendo-se encontrado, de uma forma geral, uma boa aproximação de resultados. Esta mesma comparação foi feita em relação aos modelos de elementos finitos, também com boa semelhança. Os diagramas obtidos com os resultados experimentais conduziram ao mesmo número de frequências naturais que nos modelos de elementos finitos.

Utilizando o método da amplitude foi feita uma primeira análise dos resultados, tendo-se concluído que a sobreposição dos gráficos de Bode das diversas peças repetidas era bastante boa, especialmente nas baixas frequências. Uma única excepção foi observada para a placa PLS destinada a ser utilizada na montagem com a fixação por parafuso M5, que apresentou uma divergência assinalável em relação às restantes, na terceira frequência natural. Tal é provavelmente provocado por empenos na peça ocorridos durante as várias operações de montagem, com aperto pré definido, e desmontagem ocorridas durante os testes.

Foi feita a identificação modal, com o programa de identificação BETA, a partir das funções de transferência obtidas experimentalmente. O programa BETA possui muita flexibilidade no processo de identificação e possibilita a correção de resultados o que permite contornar dificuldades nos casos mais difíceis de identificar, como por exemplo em modos de frequências muito próximas. Durante o processo de identificação, como critério de qualidade dos resultados, foi utilizada a razão de amortecimento, impondo sempre que os resultados obtidos só sejam considerados satisfatórios se a razão obtida for bastante baixa, (a ordem dos 0.005. Comparando-os, nota-se com clareza a influência da massa dos sensores, elemento a considerar na fase de melhoramento dos modelos. Devido ao pequeno número de GDL os modelos de elementos finitos não podem ser completamente validados, permitindo apenas fazer uma comparação das propriedades dinâmicas entre os modelos de elementos finitos e os experimentais.



## **CAPÍTULO 7 – MELHORAMENTO DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS**

Nos capítulos anteriores descreveram-se as razões pelas quais os modelos originais são susceptíveis de não representarem com precisão suficiente as estruturas reais e apresentou-se um conjunto de metodologias que conduzem ao melhoramento dos modelos FEM em diversas condições. Desenvolveu-se e testou-se uma ferramenta numérica que, através da co-simulação utilizando um código de FEM e um programa desenvolvido em MATLAB no qual são utilizadas metodologias de optimização, permite melhorar o modelo numérico relativamente ao modelo de referência, seja este também numérico ou adquirido experimentalmente. O modelo experimental é considerado de referência, embora podendo ter as limitações identificadas no capítulo 6, que levam a que também possa não representar perfeitamente o comportamento do protótipo. Foram discutidas as limitações dos métodos de melhoramento de modelos de elementos finitos e os cuidados a ter para que os resultados obtidos possam ser considerados de confiança. Opta-se pela utilização das características dinâmicas da estrutura dos modelos de elementos finitos e pela identificação modal dos resultados experimentais obtidos em termos da FRF como elementos de base para a comparação de resultados e para o melhoramento de modelos.

## 7.1 Introdução

O principal objectivo neste trabalho é obter modelos de elementos finitos melhorados de estruturas ligadas de diversas maneiras de forma a representarem mais fielmente o comportamento dos protótipos ensaiados experimentalmente cujos resultados são considerados de referência. Com este fim são desenvolvidos protótipos, constituídos pelas três peças, PLP, PLS e LIG. O subconjunto PLG é composto pela PLP e a LIG, unidas por parafusos M8, que por sua vez é montado na placa PLS através de, parafusos M5, Rebites de Alumínio e de aço ou por soldadura. Embora os modelos de elementos finitos tenham sido desenvolvidos respeitando fielmente a geometria e propriedades dos protótipos verifica-se haverem discrepâncias entre as características modais de modelos e protótipos, tal como foi discutido no capítulo anterior. A existência destas discrepâncias nos modelos das peças individuais podem inviabilizar a obtenção de modelos de elementos finitos melhorados que representem correctamente os elementos de ligação, como é pretendido neste capítulo. Deste forma, torna-se necessário em primeiro lugar melhorar os modelos de elementos finitos das peças individuais e só depois prosseguir para o objectivo final de obter modelos de elementos finitos melhorados que representem correctamente os elementos de ligação. São estudadas duas estratégias para a obtenção dos modelos das ligações. Numa primeira, procede-se ao melhoramento dos modelos do subconjunto seguido do melhoramento do conjunto final, mas partindo das variáveis iniciais utilizadas no melhoramento das peças individuais. Na segunda estratégia, o melhoramento do subconjunto e do conjunto final é feito a partir dos valores das variáveis melhoradas das peças isoladas. A segunda estratégia baseia-se no princípio de que para que o melhoramento de um modelo de um conjunto de peças seja conseguido com sucesso é preciso que no modelo inicial a melhorar sejam utilizadas as propriedades geométricas e materiais dos elementos finitos corrigidas para cada uma das subestruturas. Quer isto dizer que se pode aumentar a precisão do modelo do conjunto, se o modelo inicial de cada peça já apresentar uma melhor aproximação.

Assume-se que para a comparação dos resultados da análise por elementos finitos a malha utilizada para o modelo é suficientemente fina para assegurar que os modos de vibração fiquem suficientemente definidos. Mais ainda assume-se que nos testes experimentais, as ligações entre as partes das estruturas estão definidas em termos de flexibilidade. Torna-se também necessário determinar quais os parâmetros que representam



as ligações e que necessitam de ser corrigidos, ou de outra maneira identificar correctamente as regiões da estrutura de difícil, ou impossível, modelação. Outro aspecto a observar tem a ver com a selecção e a quantificação dos resultados a obter de forma a que após o melhoramento haja informação suficiente do modelo experimental para o tratamento dos resultados. Por fim recorre-se à metodologia que utiliza as características modais como forma de comparação das respostas dinâmicas do modelo e de referência. Os métodos de optimização, baseados nas equações de KKT são os eleitos para este fim, como foi discutido na secção 3.2. Se uma solução óptima não for encontrada, ou se os resultados de uma solução obtida forem fisicamente irreais ou inaceitáveis, então são necessárias maiores ajustes nos parâmetros do modelo original, o que pode não ser aceitável fisicamente. Nesse caso assume-se que o problema tenha sido mal posto, sendo necessário especificar uma nova selecção de parâmetros a serem corrigidos e reiniciando-se o processo de melhoramento.

## **7.2 Tipos de Juntas e a sua Influência nos Modelos de Elementos finitos**

A união entre peças é de difícil modelação com elementos finitos pois está condicionada não só ao processo da ligação propriamente dito, como à forma como é executada. Por exemplo a ligação por parafuso implica sempre a adição de uma massa local e o binário de aperto aplicado condiciona a coesão final entre componentes. A utilização de anilhas ou sistemas antidesaperto são outros elementos que influenciam a dinâmica do sistema. Uma ligação rebitada também tem as suas condicionantes, pois que o aperto aplicado depende muito da resistência à tracção da espiga central. O próprio furo de alojamento, ao ser executado dentro de uma tolerância especificada, possibilita a variação de peça para peça o que modifica as características do acoplamento. Pequenas variações dimensionais influenciam as características finais de cada conjunto, ou subconjunto. Estas incertezas, se bem que interessantes por permitirem ser utilizadas como instrumento para a aplicação do melhoramento de estruturas, apresentam em si mesmo ambiguidades por falta de regularidade em cada tipo de aplicação.

A soldadura é talvez um dos tipos de ligação mais utilizado na indústria apresentando uma variabilidade assinalável na sua aplicação. Ao ser aplicada por fusão das peças e/ou de material de adição de imediato não só são introduzidas alterações nas características mecânicas locais das peças como também provoca o aparecimento de tensões internas localizadas, devido à forma como o arrefecimento é feito, ou deformações devidas à

grande variação térmica introduzida. Em alguns casos, quando a quantidade de soldaduras é assinalável o comportamento estrutural dos conjuntos soldados pode mesmo sofrer alterações consideráveis levando à necessidade de serem feitos tratamentos térmicos de relaxação de tensões e, conseqüentemente, toda a estrutura apresenta características dinâmicas, pós soldadura, diferentes das iniciais.

No estudo aqui desenvolvido, foram utilizadas peças muito simples com ligações intencionalmente pouco influentes nas suas características mecânicas, de forma a ser possível avaliar a influência da ligação de uma forma mais específica. Nos modelos desenvolvidos propõe-se inicialmente modelar a ligação entre peças por vigas, que se assumem apresentar boa aproximação na representação da ligação física. A localização das vigas e as suas características mecânicas e dimensionais constituem um ponto de partida para a materialização deste objectivo. Propõe-se a introdução adicional de massas pontuais nos dos pontos de aplicação do elemento de viga, para representar a massa do componente de ligação. Nestas condições pode atribuir-se um valor baixo à densidade do modelo de viga, de forma a que a variação da sua massa durante o melhoramento, que é devida à variação da secção, não introduza uma variação secundária no modelo. O elemento associado à massa adicionada é uma massa estrutural com seis graus de liberdade. Considera-se apenas o efeito da massa nas três direcções axiais desprezando-se a inércia rotacional. Por imposição do programa de elementos finitos utilizado, o valor da massa tem de ser associado sempre a um nó, o que obriga à verificação da sua adequação aos resultados obtidos durante o processo de melhoramento dos modelos.

A ligação por mola/amortecedor é uma alternativa possível para a modelação de ligações podendo ser utilizado em dois tipos de elementos. O primeiro elemento permite três graus de liberdade e não tem associada massa, podendo esta ser adicionada utilizando o elemento de massa. O segundo tipo de elemento é uma combinação com mais possibilidades pois permite, também, deslizamento e acção de contacto. Tem apenas um grau de liberdade em cada nó e permite a translação relativa. Tem ainda incorporada uma massa que pode ser associada directamente a um dos nós ou metade em cada nó das suas extremidades. Nas análises envolvidas durante este trabalho, este último elemento é o escolhido e, conseqüentemente, nos seus pontos de aplicação é retirado de elemento de massa descrito anteriormente. Apesar das possibilidades destes elementos de mola, esta forma de ligação apresenta algumas limitações. Por exemplo, os valores das constantes de

rigidez são, geralmente, muito menores que os esperados para as ligações entre peças consideradas neste trabalho. A aplicação destes elementos com constantes de rigidez elevadas, pode conduzir a problemas numéricos associados ao mal-condicionamento da matriz de rigidez da estrutura.

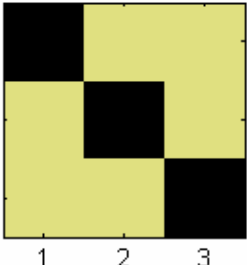
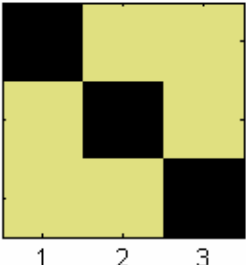
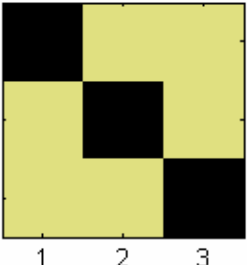
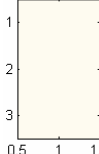
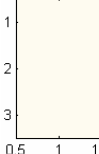
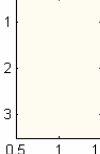
### **7.3 Melhoramento dos Modelos Numéricos a Partir dos Resultados Experimentais.**

Obtidos os modelos numéricos e os resultados experimentais, de referência, pretende-se agora melhorar os modelos de forma a que as suas características dinâmicas se aproximem das medidas experimentalmente. Este processo, como descrito na secção 2.7, passa por, inicialmente, fazer uma comparação directa das propriedades dinâmicas dos modelos, identificar as discrepâncias entre eles e, finalmente, modificar as propriedades do modelo de elementos finitos, de forma a que a sua resposta dinâmica se aproxime da do modelo de referência.

O processo de melhoramento dos modelos de elementos finitos, descrito com detalhe no capítulo 3, baseia-se na análise modal e utiliza o parâmetro MAC como principal critério de comparação. As características deste critério foram expostas no capítulo 2, tendo sido discutida a forma de como tirar melhor partido do critério, no emparelhamento das propriedades dinâmicas dos modelos. Foi utilizada a função objectivo descrita pela equação (3.28) que suporta a procura da melhor correlação entre os modelos e é agora utilizada com os exemplos experimentais. Esta função permite garantir uma convergência rápida no processo de optimização, mas revela-se, pouco sensível à existência de modos falsos, pelo que se utiliza o parâmetro de afectação do valor do MAC, o ASMAC cujos princípios foram explicados no capítulo 2. Este critério está incluído na metodologia desenvolvida para melhoramento de modelos, apresentada no capítulo 3, e afecta a escolha do emparelhamento sempre que não se reúnem as condições suficientes para que se possa consumir um emparelhamento entre modos de vibração em simultâneo com as frequências naturais. Utilizando agora comparações com resultados experimentais analisa-se a sua influencia no emparelhamento entre frequências naturais que estejam bem correlacionadas em termos de modos de vibração. Para isso recorre-se uma vez mais a um maior número de resultados obtidos no modelo de elementos finitos a melhorar, para permitir uma escolha mais abrangente.

O processo de melhoramento é aplicado aos modelos de elementos finitos apresentados no capítulo anterior. Para a apresentação dos resultados do melhoramento de cada modelo em relação às respostas experimentais de referência, idealiza-se um modelo de tabela mostrado na tabela 7.0. A metodologia seguida na representação destes resultados é a mesma já utilizada na secção 4.3, incluindo as mesmas unidades de medida. Na parte superior das tabelas representam-se os valores propostos para as várias variáveis, os limites superiores e inferior da sua variação e o seu valor final obtido após o melhoramento. Na parte intermédia e inferior da tabela, são apresentados os resultados, começando pelo valor óptimo da função objectivo conseguido durante o processo de optimização, seguindo-se o valor da função objectivo corrigida ou de comparação.

Tabela 7.1 Estrutura da tabela de comparação entre os modelos de elementos finitos inicial e melhorado e o protótipo experimental.

| Variável                | Análise 1   |           |   |            | Análise 2   |           |   |            | Análise 3   |           |   |            |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|---|-----------|---|------------|---|-----------|---|------------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |
| PREX                    |   |           |   |            |   |           |   |            |   |           |   |            |
| PREY                    |   |           |   |            |   |           |   |            |   |           |   |            |
| PRDNS                   |   |           |   |            |   |           |   |            |   |           |   |            |
| PRPXY                   |   |           |   |            |   |           |   |            |   |           |   |            |
| PRPYZ                   |   |           |   |            |   |           |   |            |   |           |   |            |
| PRESP                   |   |           |   |            |   |           |   |            |   |           |   |            |
| PRLG1                   |   |           |   |            |   |           |   |            |   |           |   |            |
| Valor objectivo         |   |           |   |            |   |           |   |            |   |           |   |            |
| Valor objectivo (comp.) |   |           |   |            |   |           |   |            |   |           |   |            |
| Desloc. Nodais finais   |   |           |   |            |   |           |   |            |   |           |   |            |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |  |           |   |            |  |           |   |            |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação final de frequências   |            | F inicial   | F final   | Correlação final de frequências   |            | F inicial   | F final   | Correlação final de frequências   |            |
|                         |   |           |  |            |   |           |  |            |   |           |  |            |
|                         |   |           |   |            |   |           |   |            |   |           |   |            |
|                         |   |           |   |            |   |           |   |            |   |           |   |            |

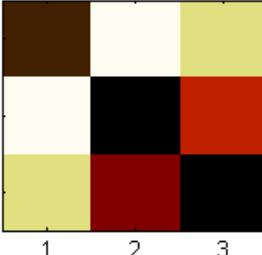
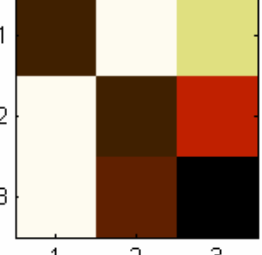
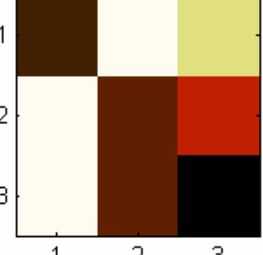
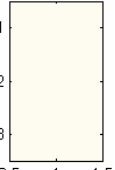
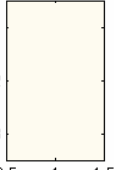
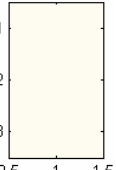
Na tabela 7.1 são apresentados deslocamentos nodais seleccionados obtidos no final de cada melhoramento. Neste caso, as linhas representam os 3 primeiros modos de vibração e as colunas contêm a resposta nos 3 pontos escolhidos. Na linha seguinte, é apresentada a imagem gráfica colorida que exhibe a matriz MAC final, onde as cores mais escuras representam uma melhor correlação e as cores claras a pior. Na parte inferior da tabela, mostram-se as frequências naturais de referência, as frequências naturais iniciais e as frequências naturais obtidas após a optimização, para cada análise. O gráfico de comparação de frequências naturais é também apresentado, mas as cores claras representam uma melhor aproximação entre as frequências obtidas no melhoramento do modelo de elementos finitos e as frequências naturais de referência, enquanto que as escuras representam a situação oposta. A estrutura de apresentação dos resultados segue estas metodologias para todas as análises apresentados neste capítulo.

Começando pela placa principal, PLP, nas tabelas 7.2 e 7.3 apresentam-se os resultados obtidos em três análises de melhoramento do modelo de elementos finitos em relação aos valores de referência obtidos experimentalmente no ensaio das placas PLPa e PLPb, respectivamente. Na primeira análise apresentada em cada uma das tabelas, utilizam-se como valores iniciais os valores sugeridos na construção do primeiro modelo de elementos finitos. Estabelecem-se como limites superior e inferior de variação de todos os parâmetros variáveis na optimização, 10 % do valor central excepto nas variáveis  $lg_1$  e  $\rho$  para as quais se adoptam variações maiores. Efectivamente na variável  $lg_1$ , que representa o factor de afectação dos cabos nas massas dos sensores, não há qualquer ideia para o seu valor final e na variável  $\rho$ , que representa a densidade da peça, aceita-se como razoável uma variação máxima de 30 %, valores que podem traduzir, mesmo assim, alguma realidade física.

Para ser possível comparar resultados entre as várias soluções encontradas recorre-se de novo à utilização da função objectivo corrigida ou de comparação. As análises 2 e 3, mostradas na tabela 7.2, representam o resultado da variação individual dos valores iniciais dentro do campo permitido procedendo de forma idêntica à descrita no capítulo 4 para a análise de sensibilidades de cada variável. Obtiveram-se melhores resultados na função objectivo, considerando  $lg_1=3.3$  e  $E_y=1.99$ . Observando o valor obtido na função objectivo de comparação, que não está afectada dos valores iniciais, verifica-se que a melhoria conseguida na terceira análise é fictícia. Efectivamente tendo-se partido de um resultado

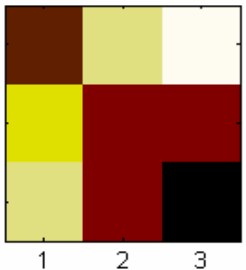
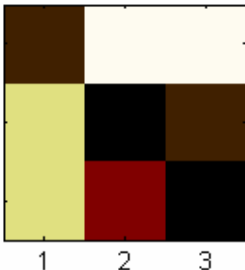
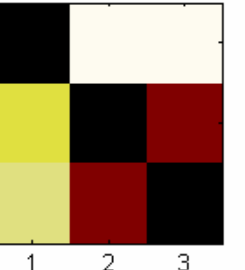
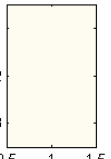
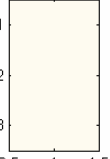
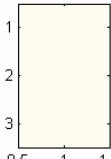
inicial melhor, a melhor solução encontrada é a obtida na análise 2 com um valor da função objectivo de comparação igual a 0.55. Analisando estes resultados, considera-se que os valores da função objectivo conseguidos são aceitáveis, uma vez que são todos próximos de zero, evidenciando que o modelo de elementos finitos final já se aproxima bastante do modelo de referência apresentado pela placa PLPa. Comparando, as frequências naturais encontradas, estas são bastante próximas das do modelo de referência. No que respeita aos modos de vibração, a diagonal principal do gráfico de cores da matriz MAC revela uma correlação aceitável.

Tabela 7.2 Resultados de três análises de melhoramento do modelo de elementos finitos em relação ao protótipo da placa PLPa

| Variável                | Análise 1   |           |   |            | Análise 2   |              |   |            | Análise 3   |              |   |            |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|---|--------------|---|------------|---|--------------|---|------------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.   | Val. Ini.    | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.   | Val. Ini.    | Lim. Sup.   | Val. final |
| $E_x$                   | 1.521   | 1.690     | 1.859   | 1.7850     | 1.521   | 1.690        | 1.859   | 1.6898     | 1.521   | 1.690        | 1.859   | 1.688      |
| $E_y$                   | 1.746   | 1.940     | 2.134   | 2.0006     | 1.746   | 1.940        | 2.134   | 1.9398     | 1.746   | <b>1.990</b> | 2.134   | 2.000      |
| $\rho$                  | 5.422   | 7.745     | 10.069  | 9.0518     | 5.422   | 7.745        | 10.069  | 7.6594     | 5.422   | 7.745        | 10.069  | 7.703      |
| $u_{xy}$                | 2.961   | 3.290     | 3.619   | 3.4750     | 2.961   | 3.290        | 3.619   | 3.2902     | 2.961   | 3.290        | 3.619   | 3.276      |
| $u_{yz}$                | 3.177   | 3.530     | 3.883   | 3.5300     | 3.177   | 3.530        | 3.883   | 3.530      | 3.177   | 3.530        | 3.883   | 3.53       |
| $h$                     | 1.638   | 1.820     | 2.002   | 1.9223     | 1.638   | 1.820        | 2.002   | 1.8198     | 1.638   | 1.820        | 2.002   | 1.811      |
| $lg_I$                  | 0.100   | 1.000     | 7.000   | 0.9497     | 0.300   | <b>3.300</b> | 7.000   | 3.2081     | 0.100   | 3.300        | 7.000   | 3.264      |
| Valor objectivo         | 0.846   |           |   |            | 0.236   |              |   |            | 0.187   |              |   |            |
| Valor objectivo (comp.) | 1.294   |           |   |            | 0.555   |              |   |            | 0.608   |              |   |            |
| Desloc. Nodais finais   | -1.578  | 0.016     | 2.340   |            | -1.899  | 0.160        | 2.326   |            | -1.905  | 1.617        | -1.922  |            |
|                         | 1.731   | -1.014    | 1.569   |            | 1.633   | -1.136       | 2.076   |            | 0.167   | -1.138       | 0.002   |            |
|                         | -1.818  | -0.029    | -2.422  |            | -1.925  | 0.008        | -2.701  |            | 2.309   | 2.092        | -2.688  |            |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |  |              |   |            |  |              |   |            |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação final de frequências   |            | F inicial   | F final      | Correlação final de frequências   |            | F inicial   | F final      | Correlação final de frequências   |            |
| 94.2                    | 94.71   | 93.98     |  |            | 93.41   | 93.95        |  |            | 94.21   | 94.16        |  |            |
| 100.4                   | 100.15  | 100.28    |   |            | 98.91   | 99.47        |   |            | 99.43   | 99.29        |   |            |
| 215.7                   | 218.00  | 217.3     |   |            | 214.51  | 215.74       |   |            | 215.91  | 215.71       |   |            |

Pode-se concluir também que as cores escuras encontradas fora da diagonal principal da matriz MAC reflectem que a informação existente não é suficiente para validar completamente os modelos de elementos finitos encontrados, indiciando a possibilidade de ocorrência de outros modos de vibração bem correlacionados com os obtidos no emparelhamento directo, proporcionando a existência de modos falsos. No entanto, devido à boa correlação entre as frequências que lhes correspondem existe a garantia que o emparelhamento obtido é o mais correcto.

Tabela 7.3 Resultados de três análises de melhoramento do modelo de elementos finitos em relação ao protótipo da placa PLPb

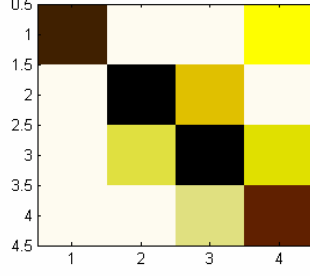
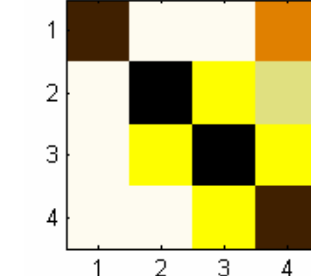
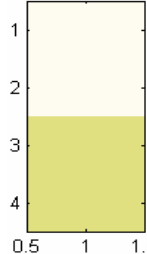
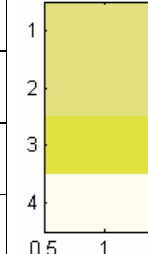
| Variável                | Análise 1   |           |   |            | Análise 2  |              |  |            | Análise 3   |              |   |            |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|--|--------------|--|------------|---|--------------|---|------------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.  | Val. Ini.    | Lim. Sup.  | Val. final | Lim. Inf.   | Val. Ini.    | Lim. Sup.   | Val. final |
| $E_x$                   | 1.521   | 1.690     | 1.859   | 1.714      | 1.521  | 1.690        | 1.859  | 1.738      | 1.521   | 1.690        | 1.859   | 1.859      |
| $E_y$                   | 1.746   | 1.940     | 2.134   | 1.898      | 1.746  | 1.940        | 2.134  | 1.908      | 1.746   | 1.940        | 2.134   | 2.134      |
| $\rho$                  | 5.422   | 7.745     | 10.069  | 8.265      | 5.422  | 7.745        | 10.069   | 7.965      | 5.422   | 7.745        | 10.069  | 10.069     |
| $u_{xy}$                | 2.961   | 3.290     | 3.619   | 3.436      | 2.961  | 3.290        | 3.619  | 3.378      | 2.961   | 3.290        | 3.619   | 3.417      |
| $u_{yz}$                | 3.177   | 3.530     | 3.883   | 3.530      | 3.177  | 3.530        | 3.883  | 3.530      | 3.177   | 3.530        | 3.883   | 3.530      |
| $h$                     | 1.638   | 1.820     | 2.002   | 1.864      | 1.638  | 1.820        | 2.002  | 1.862      | 1.638   | 1.820        | 2.002   | 2.002      |
| $lgI$                   | 0.100   | 1.000     | 7.000   | 0.950      | 0.300  | <b>3.000</b> | 7.000  | 5.130      | 0.200   | <b>2.000</b> | 7.000   | 6.762      |
| Valor objectivo         | -0.204  |           |   |            | 0.163  |              |  |            | -0.425  |              |   |            |
| Valor objectivo (comp.) | 0.516   |           |   |            | -0.438   |              |  |            | -0.578  |              |   |            |
| Desloc. Nodais finais   | -1.862  | 1.607     | -1.891  |            | -1.869   | 1.445        | -1.791   |            | -1.604  | 1.244        | -1.544  |            |
|                         | 0.155   | -1.115    | 0.007   |            | 0.213  | -1.083       | 0.029  |            | 0.180   | -0.931       | 0.016   |            |
|                         | 2.289   | 2.033     | -2.653  |            | 2.119  | 2.122        | -2.617   |            | 1.824   | 1.817        | -2.235  |            |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |  |              |  |            |  |              |   |            |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação final de frequências   |            | F inicial  | F final      | Correlação final de frequências  |            | F inicial   | F final      | Correlação final de frequências   |            |
| 93.4                    | 94.72   | 93.14     |  |            | 93.59  | 93.07        |  |            | 94.21   | 93.34        |  |            |
| 99.4                    | 100.15  | 99.4      |   |            | 99.06  | 99.58        |  |            | 99.43   | 99.44        |   |            |
| 214.5                   | 218   | 215.42    |   |            | 214.95   | 214.50       |  |            | 215.91  | 214.55       |   |            |

Quanto aos resultados apresentados pela melhoria do modelo de elementos finitos em relação ao modelo de referência obtido na placa PLPb, mostrados na tabela 7.3, nota-se que são melhores que os descritos para a placa PLPa, principalmente nos obtidos na terceira análise onde a função objectivo atingiu um valor de  $(-0,43)$ , muito próximo do melhor mínimo. No entanto pode observar-se que este bom resultado é conseguido com valores de muitos parâmetros já muito próximos dos limites superiores, o que pode pôr em causa a sua validade física. Por exemplo, a afectação dos cabos nas massas dos sensores atingiu cerca de 6.7 vezes a sua massa (valor obtido pela variável  $lg_1$ , no final da optimização, na análise 3), o que parece ser demasiado. No entanto, no que respeita ao processo de melhoramento, o resultado conseguido dá confiança na boa funcionalidade do método de melhoramento.

Para a placa PLS, foram estudadas as três modelos para as ligações por parafuso M5, rebites de alumínio e rebites de aço. Nas tabelas 7.4 e 7.5 apresentam-se dois exemplos de cada melhoramento do modelo de elementos finitos em relação aos resultados de referência apresentados pela placa preparada para a ligação por parafuso M5. As excitações aplicadas em f1 e f2 diferenciam os conjuntos de resultados de referência. Na primeira análise, com a excitação em f1, utilizam-se as variáveis associadas ao material da peça, aceitando como limites da sua variação  $\pm 10\%$ . Os valores destas variáveis, após o melhoramento, não se afastam muito dos valores iniciais, uma vez que não são as mais importantes para o melhoramento. Para o efeito apenas se considera um maior campo de variação nas variáveis  $lg_{A1}$ , que representa a flexibilização da parte central da peça e a  $lg_{A2}$  que afecta as massas de todos os sensores. O valor da função objectivo obtido 1.776, parece indicar que há possibilidade de uma maior melhoria do modelo. A variável  $u_{yz}$  não sofre qualquer variação durante o processo de melhoramento, pelo que deixa de ser utilizada como parâmetro variável. Considera-se também que a utilização de uma variável única para a massa dos sensores, não é a abordagem ideal, pois que os cabos de ligação são aplicados independentemente. Consideram-se então variáveis independentes para representar as massas dos sensores, sendo  $lg_{A2}$  correspondente ao acelerómetro 1,  $lg_{A3}$  ao acelerómetro 2 e  $lg_{A4}$  aos acelerómetros 3 e 4, pois estes estão aplicados nas extremidades da peça em condições muito semelhantes. Fez-se ainda uma análise individual a cada um destes 4 últimos parâmetros e verifica-se que os melhores pontos de partida são os apresentados na Tabela 7.4. Nestas condições procede-se a novo melhoramento sendo os resultados apresentados na mesma tabela.



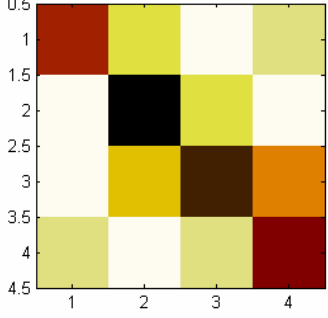
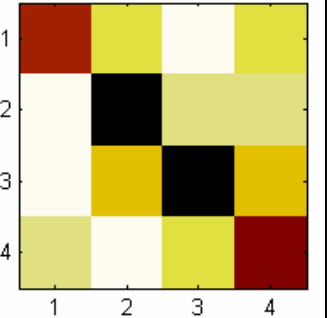
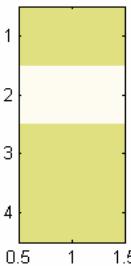
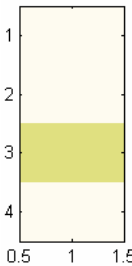
Tabela 7.4 Resultados obtidos em duas análises de melhoramento da placa PLS preparada para M5 e excitada em f1

| Variável                | Análise 1  |           |   |            | Variável                | Análise 2   |           |   |            |
|-------------------------|--|-----------|---|------------|-------------------------|---|-----------|---|------------|
|                         | Lim. Inf.  | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |
| $E_x$                   | 1.521  | 1.690     | 1.859   | 1.679      | $E_x$                   | 1.521   | 1.690     | 1.859   | 1.736      |
| $E_y$                   | 1.746  | 1.940     | 2.134   | 1.928      | $E_y$                   | 1.746   | 1.940     | 2.134   | 1.993      |
| $\rho$                  | 6.971  | 7.745     | 8.520   | 7.793      | $\rho$                  | 6.971   | 7.745     | 8.520   | 7.393      |
| $u_{xy}$                | 2.961  | 3.290     | 3.619   | 3.311      | $u_{xy}$                | 2.961   | 3.290     | 3.619   | 3.380      |
| $u_{yz}$                | 3.177  | 3.530     | 3.883   | 3.530      | $h$                     | 0.915   | 1.017     | 1.119   | 1.045      |
| $h$                     | 0.915  | 1.017     | 1.119   | 1.023      | $lg_{A1}$               | 0.270   | 2.700     | 5.400   | 3.535      |
| $lg_{A1}$               | 0.100  | 1.000     | 6.000   | 1.313      | $lg_{A2}$               | 0.390   | 3.900     | 7.800   | 5.105      |
| $lg_{A2}$               | 0.100  | 1.000     | 6.000   | 1.104      | $lg_{A3}$               | 0.390   | 3.900     | 7.800   | 5.105      |
|                         |  |           |   |            | $lg_{A4}$               | 0.390   | 3.900     | 7.800   | 5.105      |
| Valor objectivo         | 1.776  |           |   |            | Valor objectivo         | 1.811   |           |   |            |
| Valor objectivo (comp.) | 17.195   |           |   |            | Valor objectivo (comp.) | 11.938  |           |   |            |
| Desloc. Nodais finais   | -1.494   | -0.111    | 3.832   | -1.659     | Desloc. Nodais finais   | -1.224  | -2.429    | 1.035   | -2.173     |
|                         | 2.833  | -0.241    | 1.798   | 3.222      |                         | -0.174  | 0.485     | -3.312  | 1.949      |
|                         | 1.213  | -3.169    | 0.699   | 1.009      |                         | 3.717   | -1.910    | -0.133  | 2.301      |
|                         | -2.959   | 2.404     | 1.675   | 2.542      |                         | -1.738  | -3.115    | 0.895   | 1.964      |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            | Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |
| F ref                   | F inicial  | F final   | Correlação de frequências   |            | F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            |
| 13.5                    | 14.34  | 13.96     |  |            | 13.5                    | 12.24   | 12.18     |  |            |
| 33.4                    | 33.65  | 33.40     |   |            | 33.4                    | 30.98   | 31.89     |   |            |
| 59.8                    | 52.31  | 52.29     |   |            | 59.8                    | 48.31   | 49.97     |   |            |
| 75.9                    | 86.50  | 85.96     |   |            | 75.9                    | 75.28   | 75.91     |   |            |

Verifica-se que o processo de melhoramento conduz a um melhor modelo de elementos finitos, mas observa-se que a correlação do primeiro e do quarto modo mantêm-se fracas. Uma possibilidade para este fraco correlacionamento é a inferior qualidade dos

resultados experimentais, provocada pela afectação da massa dos sensores que não consegue ser compensada pela variação obtida dos parâmetros que as representam.

Tabela 7.5 Resultados obtidos nas análises de melhoria da placa PLS preparada para M5 e excitada em f2

| Variável                | Análise 1   |           |   |            | Variável                | Análise 2  |           |   |            |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|-------------------------|--|-----------|---|------------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |                         | Lim. Inf.  | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |
| $E_x$                   | 1.521   | 1.690     | 1.859   | 1.712      | $E_x$                   | 1.521  | 1.690     | 1.859   | 1.843      |
| $E_y$                   | 1.746   | 1.940     | 2.134   | 2.039      | $E_y$                   | 1.746  | 1.940     | 2.134   | 2.131      |
| $\rho$                  | 6.971   | 7.745     | 8.520   | 7.592      | $\rho$                  | 6.971  | 7.745     | 8.520   | 7.773      |
| $u_{xy}$                | 2.961   | 3.290     | 3.619   | 3.135      | $u_{xy}$                | 2.961  | 3.290     | 3.619   | 3.305      |
| $h$                     | 3.177   | 1.017     | 3.883   | 1.069      | $h$                     | 0.915  | 1.017     | 1.119   | 1.119      |
| $lg_{A1}$               | 0.100   | 1.000     | 7,000   | 2.265      | $lg_{A1}$               | 0.270  | 2.700     | <b>6.210</b>  | 3.902      |
| $lg_{A2}$               | 0.100   | 1.000     | 7,000   | 0.989      | $lg_{A2}$               | 0.390  | 3.900     | <b>8.970</b>  | 3.940      |
| $lg_{A3}$               | 0.100   | 1.000     | 6,000   | 0.983      | $lg_{A3}$               | 0.390  | 3.900     | <b>8.970</b>  | 3.981      |
| $lg_{A4}$               | 0.100   | 1.000     | 6,000   | 0.983      | $lg_{A4}$               | 0.390  | 3.900     | <b>8.970</b>  | 3.973      |
| Valor objectivo         | 1.756   |           |   |            | Valor objectivo         | 0.776  |           |   |            |
| Valor objectivo (comp.) | 11.670  |           |   |            | Valor objectivo (comp.) | 7.021  |           |   |            |
| Desloc. Nodais finais   | -1.447  | 2.922     | 1.337   | -2.965     | Desloc. Nodais finais   | -1.279   | -2.708    | 1.478   | -2.555     |
|                         | -0.212  | -0.187    | -3.128  | 2.242      |                         | -0.302   | 0.234     | -2.714  | 1.888      |
|                         | 3.797   | 1.819     | 0.407   | 2.243      |                         | 3.555  | -1.840    | -0.175  | 2.336      |
|                         | -1.550  | 2.980     | 1.053   | 2.012      |                         | -1.546   | -3.149    | 0.766   | 1.923      |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            | Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            | F ref                   | F inicial  | F final   | Correlação de frequências   |            |
| 13.7                    | 14.38   | 14.03     |  |            | 13.7                    | 12.34  | 12.99     |  |            |
| 35.7                    | 33.96   | 35.64     |   |            | 35.7                    | 31.93  | 35.72     |   |            |
| 57.0                    | 51.91   | 54.23     |   |            | 57.0                    | 46.94  | 52.25     |   |            |
| 79.8                    | 86.88   | 88.56     |   |            | 79.8                    | 76.21  | 82.39     |   |            |

A nível das frequências naturais, as diferenças também são assinaláveis, principalmente nas associadas ao terceiro modo, como já se tinha observado através da figura 6.22. O cancelamento de massa pode ser uma forma de melhorar este resultado, subtraindo ao valor real das FRF obtidas o valor da massa dos sensores no ponto de medida da força  $f1$ . No entanto considera-se mais interessante observar os resultados obtidos com a excitação em  $f2$ , já que aquele sensor é deslocado e consequentemente a sua massa vai influenciar os resultados de uma forma diferente. Nestas análises, cujos resultados se podem observar na tabela 7.5, já se consideram os mesmos valores dos parâmetros variáveis que no segundo ensaio feito com a excitação em  $f1$ , obtendo-se melhores resultados.

Relativamente aos resultados apresentados nas tabelas 7.4 e 7.5, nos quatro valores atribuídos às variáveis  $lg_A$  inicia-se com a unidade e depois, na análise seguinte, com os melhores pontos de partida. Como consequência, pode observar-se que os valores obtidos, quer na função objectivo quer na função objectivo de comparação são consideravelmente melhores, mas mesmo assim ainda insuficientes. Os primeiro e o quarto modos de vibração estão pior correlacionados, apresentando valores de MAC inferiores a 90%. No entanto a terceira frequência natural melhorou substancialmente, apresentando agora uma diferença de cerca de 5 Hz, estando as restantes com valores melhorados mais próximos que no caso da excitação em  $f1$ . Os valores finais obtidos nos parâmetros variáveis estão bastante alterados aproximando-se dos limites atribuídos, para o módulo de elasticidade e a espessura, enquanto que nos coeficientes das massas dos sensores, as alterações são pouco significativas.

Conclui-se então que os resultados experimentais neste modelo parecem estar muito afectados pelas massas dos sensores, não reflectindo com absoluta credibilidade o modelo de referência. Constata-se este facto, em primeiro lugar pela diferença de resultados encontrada entre os resultados obtidos nos dois tipos de excitação e, pela dificuldade do modelo de elementos finitos de se correlacionar com eles. A correlação entre os modelos é relativamente fraca devido principalmente à diferença na terceira frequência. A identificação modal executada nas duas primeiras frequências naturais, a partir dos resultados experimentais, é difícil de obter, porque há poucos pontos afectados e mal definidos.

Observando agora as análises executados nas placas preparadas para a ligação por rebites, cujos resultados se apresentam nas tabelas 7.6 e 7.7, pode-se concluir que há uma melhoria significativa. Os valores iniciais utilizados nas variáveis dão origem aos melhores resultados no caso das placas preparadas para ligação por parafuso.

Tabela 7.6 Resultados obtidos nas análises de melhoramento da placa PLS, excitada em f1, preparada para ligação por rebite:

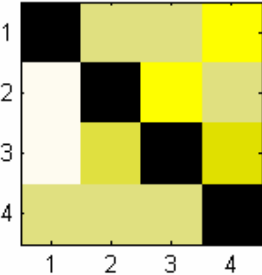
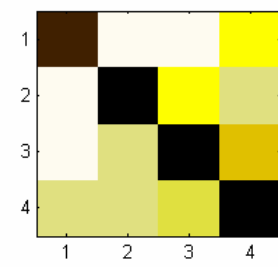
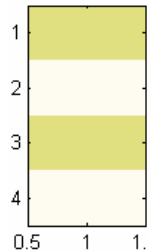
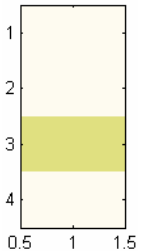
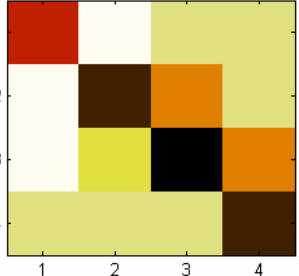
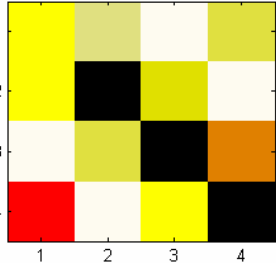
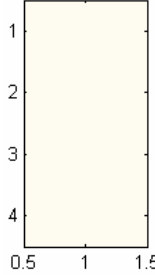
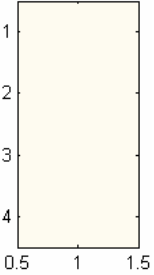
| Variável                | Análise 1 (Rebite de Alumínio)  |           |   |            | Variável                | Análise 2 (Rebite de Aço)  |           |   |            |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|-------------------------|--|-----------|---|------------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |                         | Lim. Inf.  | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |
| $E_x$                   | 1.521   | 1.690     | 1.859   | 1.651      | $E_x$                   | 1.521  | 1.690     | 1.859   | 1.692      |
| $E_y$                   | 1.746   | 1.940     | 2.134   | 1.889      | $E_y$                   | 1.746  | 1.940     | 2.134   | 1.944      |
| $\rho$                  | 6.971   | 7.745     | 8.520   | 7.547      | $\rho$                  | 6.971  | 7.745     | 8.520   | 7.405      |
| $u_{xy}$                | 2.961   | 3.290     | 3.619   | 3.204      | $u_{xy}$                | 2.961  | 3.290     | 3.619   | 3.294      |
| $h$                     | 0.915   | 1.017     | 1.119   | 0.988      | $h$                     | 0.915  | 1.017     | 1.119   | 1.017      |
| $lg_{A1}$               | 0.270   | 2.700     | 5.400   | 2.192      | $lg_{A1}$               | 0.270  | 2.700     | 5.400   | 2.732      |
| $lg_{A2}$               | 0.390   | 3.900     | 7.800   | 7.132      | $lg_{A2}$               | 0.390  | 3.900     | 7.800   | 3.902      |
| $lg_{A3}$               | 0.390   | 3.900     | 7.800   | 3.147      | $lg_{A3}$               | 0.390  | 3.900     | 7.800   | 3.939      |
| $lg_{A4}$               | 0.390   | 3.900     | 7.800   | 3.083      | $lg_{A4}$               | 0.390  | 3.900     | 7.800   | 3.907      |
| Valor objectivo         | 1.491   |           |   |            | Valor objectivo         | 0.650  |           |   |            |
| Valor objectivo (comp.) | 4.725   |           |   |            | Valor objectivo (comp.) | 4.750  |           |   |            |
| Desloc. Nodais finais   | -1.383  | 2.699     | 1.123   | -2.569     | Desloc. Nodais finais   | -1.331   | 2.565     | 1.040   | -2.408     |
|                         | -0.107  | -0.464    | -3.273  | 2.114      |                         | -0.135   | -0.456    | -3.327  | 2.175      |
|                         | 3.878   | 1.886     | 0.286   | 2.109      |                         | 3.802  | 1.931     | 0.146   | 2.199      |
|                         | -1.782  | 3.142     | 1.034   | 2.397      |                         | -1.793   | 3.135     | 1.047   | 2.197      |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            | Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            | F ref                   | F inicial  | F final   | Correlação de frequências   |            |
| 13.3                    | 12.24   | 12.46     |  |            | 12.5                    | 12.24  | 12.49     |  |            |
| 30.8                    | 30.98   | 30.80     |   |            | 32.1                    | 30.98  | 31.61     |   |            |
| 52.4                    | 48.31   | 48.02     |   |            | 54.2                    | 48.31  | 49.34     |   |            |
| 76.0                    | 75.28   | 76.27     |   |            | 76.6                    | 75.28  | 76.75     |   |            |

Tabela 7.7 Resultados obtidos nas análises de melhoramento da placa PLS, excitada em f2, preparada para ligação por rebite:

| Variável                | Análise 1 (Rebite de Alumínio)  |           |   |            | Variável                | Análise 2 (Rebite de Aço)   |           |   |            |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|-------------------------|---|-----------|---|------------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |
| $E_x$                   | 1.521   | 1.690     | 1.859   | 1.654      | $E_x$                   | 1.521   | 1.690     | 1.859   | 1.640      |
| $E_y$                   | 1.746   | 1.940     | 2.134   | 1.892      | $E_y$                   | 1.746   | 1.940     | 2.134   | 1.885      |
| $\rho$                  | 6.971   | 7.745     | 8.520   | 0.711      | $\rho$                  | 6.971   | 7.745     | 8.520   | 7.516      |
| $u_{xy}$                | 2.961   | 3.290     | 3.619   | 3.228      | $u_{xy}$                | 2.961   | 3.290     | 3.619   | 3.193      |
| $h$                     | 0.915   | 1.017     | 1.119   | 0.984      | $h$                     | 0.915   | 1.017     | 1.119   | 1.029      |
| $lg_{A1}$               | 0.270   | 2.700     | 5.400   | 2.346      | $lg_{A1}$               | 0.270   | 2.700     | 5.400   | 2.138      |
| $lg_{A2}$               | 0.390   | 3.900     | 7.800   | 3.062      | $lg_{A2}$               | 0.390   | 3.900     | 7.800   | 3.073      |
| $lg_{A3}$               | 0.390   | 3.900     | 7.800   | 3.110      | $lg_{A3}$               | 0.390   | 3.900     | 7.800   | 3.050      |
| $lg_{A4}$               | 0.390   | 3.900     | 7.800   | 3.056      | $lg_{A4}$               | 0.390   | 3.900     | 7.800   | 3.095      |
| Valor objectivo         | 0.198   |           |   |            | Valor objectivo         | -0.095  |           |   |            |
| Valor objectivo (comp.) | 0.708   |           |   |            | Valor objectivo (comp.) | -0.209  |           |   |            |
| Desloc. Nodais finais   | -1.542  | 3.121     | 1.587   | -2.985     | Desloc. Nodais finais   | -1.542  | 3.121     | 1.587   | -2.985     |
|                         | -0.199  | -0.257    | -3.170  | 2.144      |                         | -0.199  | -0.257    | -3.170  | 2.144      |
|                         | 4.004   | 1.922     | 0.233   | 2.526      |                         | 4.004   | 1.922     | 0.233   | 2.526      |
|                         | -1.656  | 3.163     | 0.883   | 2.342      |                         | -1.656  | 3.163     | 0.883   | 2.342      |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            | Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            | F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            |
| 13.1                    | 12.34   | 12.76     |  |            | 12.8                    | 12.34   | 12.96     |  |            |
| 32.4                    | 31.94   | 32.39     |   |            | 33                      | 31.96   | 32.99     |   |            |
| 49.2                    | 47.00   | 48.46     |   |            | 50.2                    | 47.05   | 50.30     |   |            |
| 78.9                    | 76.23   | 79.26     |   |            | 81.2                    | 76.24   | 81.19     |   |            |

Nas análises das placas excitadas em f1 a correlação MAC, entre os modos de vibração, apresentaram valores superiores a 90%. A nível de frequências naturais, a que

está associada ao terceiro modo de vibração ainda existe uma diferença de cerca de 5 Hz no caso da placa destinada a ser ligada por rebite de aço. Mas, mesmo assim, são obtidas melhores correlações nas restantes frequências. Nas placas excitadas em  $f_2$  ocorre o inverso, isto é, excelentes correlações a nível das frequências naturais, que originam melhores resultados dos valores objectivo. Efectivamente, no caso da placa preparada para o rebite de aço, atinge-se um valor objectivo de comparação de (-0.2) que se aproxima do valor óptimo. No entanto a nível do critério MAC, no primeiro modo de vibração as correlações são muito fracas, principalmente na placa preparada para o rebite de aço para a qual  $MAC=0.21$ . Esta fraca correlação deve-se à muito pequena quantidade de pontos encontrados neste caso nas funções de transferências que não permitem obter uma identificação correcta do primeiro modo de vibração experimental. Os restantes valores do MAC são todos bons, não sendo nenhum inferior a 0.95.

Verifica-se que existe uma boa correlação entre frequências naturais, mas a correlação MAC entre os modos de vibração apresenta valores de 0.54 no modelo destinado a ser montado com o parafuso M5, de 0.88 no preparado para o rebite de aço e 0.79 no modelo para rebite de alumínio. Esta relativa fraca correlação do MAC, principalmente no modelo com ligador M5 indicia dificuldades no melhoramento do modelo do conjunto a nível deste modo de vibração.

## **7.4 Melhoramento dos Modelos de Elementos Finitos dos Conjuntos a Partir dos Parâmetros Iniciais.**

A validação dos modelos de referência antes da utilização da sua resposta no melhoramento do modelo de elementos finitos é muito importante. Para tal é necessário utilizar mais pontos de medição nodais para os modelos aqui estudados. No entanto o aumento do número de pontos de medição acarreta também uma maior influência da massa dos sensores e da influência sobre a resposta dinâmica. Por estas razões opta-se por uma solução de compromisso aumentando-se significativamente o nível de detalhe de qualidade do modelo de elementos finitos a melhorar. Consegue-se assim utilizar modelos de elementos finitos que se consideram já ser representativos dos protótipos. Obtêm-se, depois, modelos de elementos finitos melhorados das peças individualmente, cujos resultados estão descritos na secção 7.3. Faz-se aqui o melhoramento dos modelos dos conjuntos. Através da ligação entre peças, com a introdução de uma modificação estrutural

no ponto de ligação, o modelo é alterado para que reproduza com melhor fiabilidade o comportamento do conjunto. A introdução deste elemento de ligação permite mover as características de vibração da estrutura de modo a aproximá-la das do modelo de referência, obtido experimentalmente. Para que a modificação tenha sucesso, todos os modos envolvidos devem ser considerados em cada componente. É então possível obter uma nova equação de movimento para a estrutura modificada utilizando novas matrizes de massa  $\mathbf{M}$  e de rigidez  $\mathbf{K}$ , para descrever a modificação estrutural, dadas por (Ewins, D. J., 2000:493-494):

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{mxm} &= \mathbf{I}_{mxm} + \Phi_{mxn}^T \Delta \mathbf{M}_{nxi} \Phi_{nxm} \\ \mathbf{K} &= \omega_r^2 + \Phi^T \Delta \mathbf{K} \Phi\end{aligned}\quad (7.1)$$

em que  $\Delta \mathbf{M}$  e  $\Delta \mathbf{K}$  representam as diferenças de massa e de rigidez em relação ao modelo original. A partir destas novas matrizes podem-se determinar os novos valores e vectores próprios e obter novas características dinâmicas da estrutura modificada.

A aplicação analítica deste conceito, que implica a adição de qualquer elemento numa estrutura, introduz normalmente efeitos rotativos, que condicionam os resultados. No entanto no caso presente, os elementos adicionais introduzidos procuram reflectir um efeito equivalente ao introduzido no protótipo, que também afecta toda a estrutura. Portanto a modificação estrutural não representa, neste caso, uma adulteração do modelo, mas uma aproximação ao modelo de referência.

Começando pelo subconjunto PLG, este modelo foi ensaiado experimentalmente utilizando as diversas hipóteses de montagem, obtendo-se vários resultados de referência, apresentados nas tabelas 6.30 a 6.37. Com estes resultados são feitos melhoramentos do modelo de elementos finitos, em relação a cada modelo de referência, obtendo-se os valores da função objectivo e da função objectivo de comparação mostrados na tabela 7.8.

De uma forma geral os resultados não são satisfatórios e a principal razão prende-se com a proximidade das duas primeiras frequências naturais. Esta situação que se agrava no subconjunto na aquisição experimental, impede a correcta separação dos pontos a envolver na FRF que verdadeiramente afectam cada modo na identificação modal. A consequência é a maior dificuldade do melhoramento do modelo de elementos finitos. Os valores e vectores próprios de cada modo, no cálculo executado em cada modelo de elementos finitos são obtidos pela combinação linear de outros modos. Como neste caso se encontram

frequências naturais muito próximas, esta combinação linear pode resultar sempre no mesmo valor de frequência natural e não ser possível encontrar uma melhor aproximação que à obtida no modelo de referência.

Tabela 7.8 Resultados obtidos no melhoramento do modelo de elementos finitos em relação às análises da placa PLG

| Modelo Experimental | Excitação em f1 |                               | Excitação em f2 |                               |
|---------------------|-----------------|-------------------------------|-----------------|-------------------------------|
|                     | Valor objectivo | Valor objectivo de comparação | Valor objectivo | Valor objectivo de comparação |
| PLGa                | 1.1494          | 3.2378                        | 1.2852          | 3.0176                        |
| PLGb                | 1.4224          | 2.4273                        | 0.7275          | 3.4616                        |
| PLGc                | 1.1302          | 3.5476                        | <b>1.0764</b>   | <b>1.3596</b>                 |
| PLGd                | 1.1212          | 3.3475                        | 0.9214          | 2.8377                        |
| PLGe                | 0.9944          | 5.1748                        | 1.1805          | 5.5713                        |
| PLGf                | 0.9941          | 3.4679                        | 1.3600          | 3.6754                        |
| PLGg                | 1.3733          | 3.3233                        | 0.7902          | 2.5136                        |
| PLGh                | <b>0.8645</b>   | <b>1.6711</b>                 | -0.0614         | 10.7186                       |

Para minorar o problema da existência de frequências repetidas introduzem-se novas variáveis no processo de melhoramento para aumentar a sensibilidade da análise e obter novos resultados, previsivelmente mais próximos dos obtidos com as nove variáveis iniciais. Durante as várias tentativas de escolha das variáveis mais interventivas, tenta-se acrescentar a possibilidade de variação individual da massa dos 3 parafusos M8 de fixação das placas ao ligador, tentando-se usar o potencial de haver alguma assimetria. No entanto, verifica-se que em cada iteração no processo de melhoramento, as variáveis correspondentes têm uma variação reduzida, evoluindo da mesma forma. Por esta razão as variáveis associadas às massas dos parafusos não são suficientes para quebrar as simetrias, e por isso não são utilizadas.. Tenta-se a introduzir outra variável associada a uma massa pontual num ponto localizado em local oposto ao ponto de medida 3, na perspectiva de equilibrar a assimetria provocada pela massa daquele acelerómetro. Também, neste caso, se verifica que não há variação significativa durante o melhoramento, pelo que também se retirou e eliminou do processo. Também as variáveis afectas às propriedades das vigas de ligação pouco variam durante a optimização, apenas a densidade  $\rho$  e a  $lg_1$  correspondente à largura de cada viga têm uma influência significativa. As variáveis  $lg_{A1}$  e  $lg_{A2}$ , que afectam a massa dos sensores, agora têm muito menos influência que no caso das placas isoladas,



verificando-se que o seu valor se aproxima muito da unidade, daí que o limite máximo imposto a estas variáveis seja agora muito reduzido.

Nos modelos obtidos com a excitação em  $f_1$ , obtêm-se correlações entre os modos de vibração com valores do MAC sempre superiores a 0.96. Nos modelos com excitação em  $f_2$ , obtêm-se valores do MAC de 0.53, principalmente no terceiro modo de vibração, sendo pior isso piores que no caso da excitação em  $f_1$ . No entanto a nível das frequências naturais, a correlação é semelhante para as duas formas de excitação, ocorrendo diferenças máximas de 4Hz.

O modelo PLGh excitado em  $f_2$  apresenta um valor da função objectivo melhor que os restantes. No entanto, como o valor objectivo de comparação apresenta um valor consideravelmente alto, 10.71, este reflecte que a correlação inicial entre modelos foi fraca. Este valor de fraca correlação surge porque a metodologia, na primeira iteração, emparecei modos de vibração de frequências naturais muito diferentes levando a que a função objectivo inicial seja muito elevada. No final do melhoramento do modelo foi encontrada uma solução, que apesar de ter modos de vibração ainda pouco correlacionados, são conseguidos com frequências naturais mais próximas entre modelos, tendo como consequência uma melhor a função objectivo final.

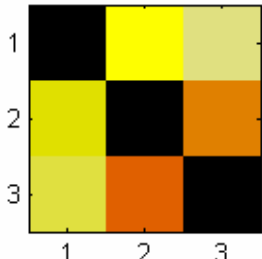
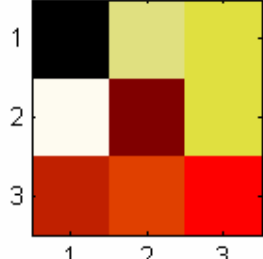
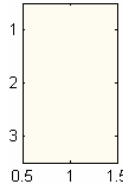
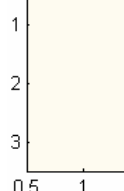
As vigas de ligação introduzem novos modos de vibração com deslocamentos modais em direcções não perpendiculares à superfície das placas mas com frequências naturais dentro do campo de estudo. Nestas circunstâncias, estes modos de vibração são considerados parasitas e, a metodologia de melhoramento rejeita-os. Por exemplo, no modelo PLGh, com excitação em  $f_1$ , surgem duas frequências naturais parasitas a 85.16 e 85.34 Hz.

Apenas dois dos parâmetros variáveis associados às vigas influenciam o melhoramento do modelo, sendo a densidade,  $\rho_A$ , o mais influente. No entanto estes parâmetros têm uma influência semelhante à conseguida pelas restantes variáveis associadas às peças individuais. Em análises realizadas apenas com os parâmetros associados às vigas de ligação, o melhoramento conseguido foi insignificante.

A tabela 7.9 apresenta os casos onde foram obtidos os melhores resultados. A matriz MAC de correlação dos modos de vibração entre o modelo de elementos finitos e a placa PLGb, em  $f_2$ , não apresentada na tabela, exhibe valores todos superiores a 0.96, muito

melhores que os apresentados na tabela 7.9 na placa PLGc, mas no caso das frequências naturais o modelo PLGc suplanta o PLGb de forma suficiente para que a função objectivo de comparação seja a melhor.

Tabela 7.9 Os melhores resultados obtidos nas análises de melhoramento do subconjunto PLG

| Variável                | Placa PLGh excitada em f1   |           |   |            | Variável                | Placa PLGc excitada em f2  |           |   |            |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|-------------------------|--|-----------|---|------------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |                         | Lim. Inf.  | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |
| $E_x$                   | 1.183   | 1.690     | 2.197   | 2.106      | $E_x$                   | 1.52   | 1.690     | 2.03  | 1.722      |
| $E_y$                   | 1.358   | 1.940     | 2.520   | 1.782      | $E_{xA}$                | 1.18   | 1.690     | 2.54  | 1.723      |
| $\rho$                  | 5.422   | 7.745     | 10.069  | 7.116      | $E_y$                   | 1.75   | 1.940     | 2.33  | 1.984      |
| $\rho_A$                | 0.4500  | 0.500     | 4.500   | 1.923      | $\rho$                  | 6.97   | 7.750     | 9.29  | 7.885      |
| $u_{xy}$                | 2.303   | 3.290     | 4.277   | 3.019      | $\rho_A$                | 0.09   | 0.100     | 8.10  | 3.368      |
| $h$                     | 1.274   | 1.017     | 2.366   | 1.672      | $u_{xy}$                | 2.96   | 3.290     | 3.95  | 3.365      |
| $lg_I$                  | 0.597   | 2.700     | 11.948  | 4.725      | $u_{xyA}$               | 2.30   | 3.290     | 4.94  | 3.356      |
| $lg_{AI}$               | 0.100   | 1.000     | 2.000   | 0.791      | $U_{yz}$                | 3.18   | 3.530     | 4.24  | 3.601      |
| $lg_{A2}$               | 0.100   | 1.000     | 2.000   | 0.790      | $h$                     | 1.64   | 1.820     | 2.18  | 1.853      |
|                         |   |           |   |            | $lg_I$                  | 0.18   | 1.800     | 19.80   | 12.074     |
|                         |   |           |   |            | $lg_{AI}$               | 0.21   | 2.100     | 12.60   | 5.281      |
| Valor objectivo         | 0.864   |           |   |            | Valor objectivo         | 1.076  |           |   |            |
| Valor objectivo (comp.) | 1.671   |           |   |            | Valor objectivo (comp.) | 1.359  |           |   |            |
| Desloc. Nodais finais   | 1.735   | 1.223     | -1.403  |            | Desloc. Nodais finais   | 1.065  | 1.466     | 1.051   |            |
|                         | -1.532  | 1.492     | 1.375   |            |                         | -1.563   | 0.673     | -1.094  |            |
|                         | -2.700  | 2.109     | -3.076  |            |                         | -2.928   | 0.934     | 2.688   |            |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            | Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            | F ref                   | F inicial  | F final   | Correlação de frequências   |            |
| 87.5                    | 89.52   | 87.62     |  |            | 85.8                    | 88.94  | 87.30     |  |            |
| 90.2                    | 91.78   | 92.38     |   |            | 91.3                    | 91.85  | 91.64     |   |            |
| 216.2                   | 216.62  | 216.16    |   |            | 215.1                   | 215.38   | 214.92    |   |            |

Apresentam-se por fim as análises realizadas com os conjuntos completos CPLP. Destes, foram testados os 10 modelos apresentados no capítulo anterior, na tabela 6.21. No entanto apenas se extraíram resultados por identificação modal de três modelos correspondentes aos conjuntos de peças designados CPLPa, CPLPb e CPLPc e ainda o modelo designado CPLPi. Os conjuntos CPLPa e CPLPc utilizam ambos a ligação por rebite de alumínio e têm placas principais diferentes. O conjunto CPLPb tem uma ligação por parafuso M5 e o CPLPi uma ligação por rebite de aço. Utilizam-se as 16 variáveis descritas na tabela 6.13 para tentar o melhoramento dos modelos. Apenas se alteram os valores correspondentes às larguras das vigas de ligação,  $lg_1$  e  $lg_2$ , às quais se atribuiu o valor de 3, porque é esperado que este parâmetro, após o melhoramento, apresente um valor próximo do atribuído, de acordo com uma análise individual da sua evolução. Os limites permitidos às variáveis durante as análises são de uma forma geral 10%, excepto a características das vigas de ligação,  $\rho_A$ , que se aceita a possibilidade de aumentar 80 vezes, a variável  $u_{xyA}$  que se admite uma variação de  $\pm 30\%$ , os valores de  $lg_1$  e  $lg_2$  para os quais se permite uma variação mínima de 90% e máxima de 500% e nas variáveis  $lg_{A1}$  a  $lg_{A4}$  para as quais se impôs como limites mínimo 90% e máximo 100%, respectivamente. Como a variável  $u_{yz}$  apresenta uma pequena variação, foi removida das variáveis de projecto nas análises seguintes. Nas tabelas 7.10 a 7.13 apresentam-se os melhores resultados obtidos nas análises destes conjuntos.

Pode observar-se na tabela 7.9 que as 2 primeiras frequências naturais as correlações são piores, atingindo-se diferenças no valor das frequências de cerca de 2 Hz, enquanto que nas mais altas os valores finais obtidos apresentam uma boa semelhança com as do modelo de referência.

Nos modos de vibração a principal diferença ocorre no primeiro modo de vibração onde nos conjuntos com excitação em f1 os modos de vibração podem ser considerados perfeitamente distintos. A justificação para estas divergências prende-se, mais uma vez, com os resultados provenientes das placas PLS provocados pela identificação obtida no primeiro modo de vibração, como já foi descrito. Naturalmente que os seus valores e vectores próprios, assim obtidos, levam a piores resultados nos valores objectivo destes conjuntos.

Tabela 7.10 Resultados obtidos nas análises de melhoramento do conjunto CPLP ligado por rebite de alumínio com excitação em f1

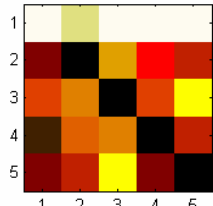
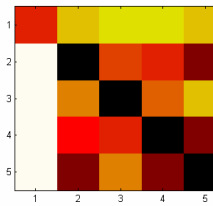
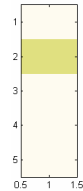
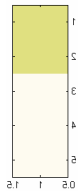
| Variável               | Modelo CPLPa  |           |   |            | Modelo CPLPc   |           |           |   |       |        |
|------------------------|---|-----------|---|------------|--|-----------|-----------|---|-------|--------|
|                        | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.  | Val. Ini. | Lim. Sup. | Val. final  |       |        |
| $E_x$                  | 1.52  | 1.690     | 1.86  | 1.651      | 1.52   | 1.690     | 1.86      | 1.654   |       |        |
| $E_{xA}$               | 1.52  | 1.690     | 1.86  | 1.645      | 1.52   | 1.690     | 1.86      | 1.656   |       |        |
| $E_y$                  | 1.75  | 1.940     | 2.13  | 1.898      | 1.75   | 1.940     | 2.13      | 1.898   |       |        |
| $\rho$                 | 6.97  | 7.750     | 8.52  | 8.069      | 6.97   | 7.750     | 8.52      | 7.591   |       |        |
| $\rho_A$               | 0.09  | 0.100     | 8.10  | 4.702      | 0.09   | 0.100     | 8.10      | 3.295   |       |        |
| $u_{xy}$               | 2.96  | 3.290     | 3.62  | 3.415      | 2.96   | 3.290     | 3.62      | 3.232   |       |        |
| $u_{xyA}$              | 2.30  | 3.290     | 4.28  | 3.261      | 2.30   | 3.290     | 4.28      | 3.093   |       |        |
| $U_{yz}$               | 3.18  | 3.530     | 3.88  | 3.443      |  | 3.530     | Fixo      | 3.530   |       |        |
| $h$                    | 1.64  | 1.820     | 2.00  | 1.908      | 1.64   | 1.820     | 2.00      | 1.859   |       |        |
| $h_1$                  | 0.92  | 1.020     | 1.12  | 1.074      | 0.92   | 1.020     | 1.12      | 0.995   |       |        |
| $lg_1$                 | 0.30  | 3.000     | 18.00   | 10.194     | 0.30   | 3.000     | 18.00     | 7.381   |       |        |
| $lg_2$                 | 0.30  | 3.000     | 18.00   | 10.191     | 0.30   | 3.000     | 18.00     | 7.381   |       |        |
| $lg_{A1}$              | 0.10  | 1.000     | 2.00  | 1.496      | 0.10   | 1.000     | 2.00      | 0.859   |       |        |
| $lg_{A2}$              | 0.10  | 1.000     | 2.00  | 1.037      | 0.10   | 1.000     | 2.00      | 0.860   |       |        |
| $lg_{A3}$              | 0.10  | 1.000     | 2.00  | 1.069      | 0.10   | 1.000     | 2.00      | 0.860   |       |        |
| $lg_{A4}$              | 0.10  | 1.000     | 2.00  | 1.414      | 0.10   | 1.000     | 2.00      | 0.879   |       |        |
| Valor objetivo         | 1.301   |           |   |            | 2.227  |           |           |   |       |        |
| Valor objetivo (comp.) | 1.214   |           |   |            | 2.397  |           |           |   |       |        |
| Desloc Nodais finais   | 0.020   | 1.146     | -0.334  | 0.517      | -0.305   | 0.178     | 1.222     | -0.351  | 0.569 | -0.250 |
|                        | -0.503  | 0.528     | 0.511   | 0.260      | 0.542  | -0.489    | 0.640     | 0.533   | 0.285 | 0.455  |
|                        | 0.567   | -0.402    | -1.052  | 0.140      | 1.643  | 0.585     | -0.487    | -1.065  | 0.139 | 1.432  |
|                        | 3.744   | -1.523    | 0.984   | 1.334      | 1.748  | 3.848     | -2.070    | 1.275   | 1.190 | 1.972  |
|                        | 3.961   | -1.696    | 1.024   | 1.622      | 2.044  | -2.680    | -2.715    | 1.371   | 2.077 | 3.212  |
| Matriz MAC (cor)       |  |           |   |            |  |           |           |   |       |        |
| F ref                  | F inicial   | F final   |  |            | F ref  | F inicial | F final   |  |       |        |
| 12.8                   | 13.20   | 12.83     |   |            | 11.4   | 13.20     | 12.80     |   |       |        |
| 13.3                   | 14.96   | 14.87     |   |            | 13.7   | 14.96     | 14.50     |   |       |        |
| 26.3                   | 26.48   | 26.41     |   |            | 25.3   | 26.48     | 25.94     |   |       |        |
| 44.9                   | 45.23   | 44.90     |   |            | 44.9   | 45.23     | 44.56     |   |       |        |
| 72.8                   | 72.46   | 72.86     | 72  | 72.46      | 72.01  |           |           |   |       |        |

Tabela 7.11 Resultados obtidos nas análises de melhoramento do conjunto CPLP ligado por parafuso M5 e rebite de aço com excitação em f1

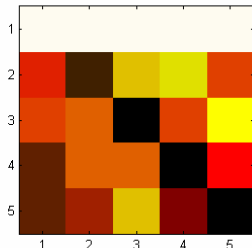
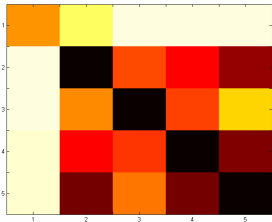
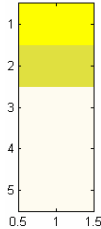
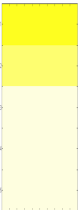
| Variável                | Modelo CPLPb (parafuso M5)  |           |   |            | Modelo CPLPi (rebite de aço)   |           |           |   |       |        |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|--|-----------|-----------|---|-------|--------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.  | Val. Ini. | Lim. Sup. | Val. final  |       |        |
| $E_x$                   | 1.52  | 1.69      | 1.86  | 1.734      | 1.52   | 1.690     | 1.86      | 1.712   |       |        |
| $E_{xA}$                | 1.52  | 1.69      | 1.86  | 1.737      | 1.52   | 1.690     | 1.86      | 1.703   |       |        |
| $E_y$                   | 1.75  | 1.94      | 2.13  | 1.850      | 1.75   | 1.940     | 2.13      | 1.965   |       |        |
| $\rho$                  | 6.97  | 7.75      | 8.52  | 7.968      | 6.97   | 7.750     | 8.52      | 7.949   |       |        |
| $\rho_A$                | 0.09  | 0.10      | 8.10  | 5.178      | 0.09   | 0.100     | 8.10      | 0.096   |       |        |
| $u_{xy}$                | 2.96  | 3.29      | 3.62  | 3.376      | 2.96   | 3.290     | 3.62      | 3.308   |       |        |
| $u_{xyA}$               | 2.30  | 3.29      | 4.28  | 3.559      | 2.30   | 3.290     | 4.28      | 3.290   |       |        |
| $U_{yz}$                |   | 3.53      | Fixo  | 3.530      |  | 3.530     | Fixo      | 3.530   |       |        |
| $h$                     | 1.64  | 1.82      | 2.00  | 1.874      | 1.64   | 1.820     | 2.00      | 1.843   |       |        |
| $h_1$                   | 0.92  | 1.02      | 1.12  | 1.045      | 0.92   | 1.020     | 1.12      | 1.030   |       |        |
| $lg_1$                  | 0.30  | 3.00      | 18.00   | 11.515     | 0.30   | 3.000     | 18.00     | 2.911   |       |        |
| $lg_2$                  | 0.30  | 3.00      | 18.00   | 11.515     | 0.30   | 3.000     | 18.00     | 2.938   |       |        |
| $lg_{A1}$               | 0.10  | 1.00      | 2.00  | 1.337      | 0.10   | 1.000     | 2.00      | 1.032   |       |        |
| $lg_{A2}$               | 0.10  | 1.00      | 2.00  | 1.291      | 0.10   | 1.000     | 2.00      | 0.996   |       |        |
| $lg_{A3}$               | 0.10  | 1.00      | 2.00  | 1.291      | 0.10   | 1.000     | 2.00      | 0.982   |       |        |
| $lg_{A4}$               | 0.10  | 1.00      | 2.00  | 1.324      | 0.10   | 1.000     | 2.00      | 0.906   |       |        |
| Valor objectivo         | 1.909   |           |   |            | 2.926  |           |           |   |       |        |
| Valor objectivo (comp.) | 3.785   |           |   |            | 3.157  |           |           |   |       |        |
| Desloc. Modais finais   | 0.009   | 1.136     | -0.336  | 0.511      | -0.366   | 0.117     | 1.222     | -0.362  | 0.557 | -0.294 |
|                         | -0.510  | 0.512     | 0.501   | 0.255      | 0.587  | -0.520    | 0.630     | 0.540   | 0.297 | 0.540  |
|                         | 0.580   | -0.400    | -1.041  | 0.157      | 1.776  | 0.602     | -0.474    | -1.094  | 0.138 | 1.539  |
|                         | 3.853   | -1.495    | 1.063   | 1.313      | 1.753  | 3.792     | -1.803    | 1.197   | 1.182 | 1.827  |
|                         | 4.080   | -1.668    | 1.109   | 1.601      | 2.050  | -2.393    | -2.528    | 1.363   | 1.719 | 2.838  |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |  |           |           |   |       |        |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            | F ref  | F inicial | F final   | Correlação de frequências   |       |        |
| 10.5                    | 12.95   | 12.84     |  |            | 11.1   | 277.78    | 13.22     |  |       |        |
| 12.8                    | 14.66   | 14.66     |   |            | 13.3   | 14.79     | 14.87     |   |       |        |
| 26.2                    | 26.33   | 26.27     |   |            | 26.1   | 26.18     | 26.31     |   |       |        |
| 44.8                    | 44.87   | 44.76     |   |            | 45   | 44.80     | 45.00     |   |       |        |
| 72.7                    | 72.67   | 72.67     |   |            | 72.7   | 72.26     | 72.64     |   |       |        |

Tabela 7.12 Resultados obtidos nas análises de melhoramento do conjunto CPLP ligado por rebite de alumínio com excitação em f2

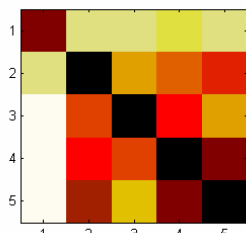
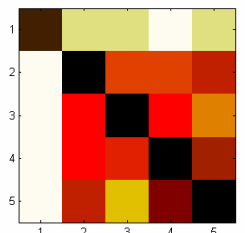
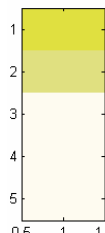
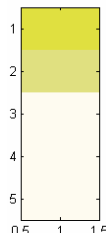
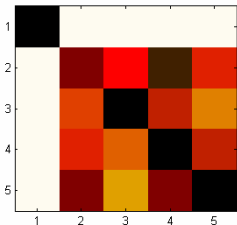
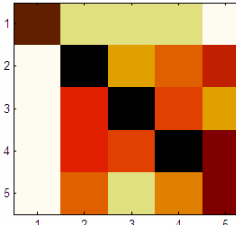
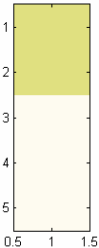
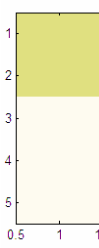
| Variável               | Modelo CPLPa  |           |   |            | Modelo CPLPc   |           |           |   |       |        |
|------------------------|---|-----------|---|------------|--|-----------|-----------|---|-------|--------|
|                        | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.  | Val. Ini. | Lim. Sup. | Val. final  |       |        |
| $E_x$                  |   | 1.690     | Fixo  | 1.690      |  | 1.690     | Fixo      | 1.690   |       |        |
| $E_{xA}$               |   | 1.690     | Fixo  | 1.690      |  | 1.690     | Fixo      | 1.690   |       |        |
| $E_y$                  |   | 1.940     | Fixo  | 1.940      |  | 1.940     | Fixo      | 1.940   |       |        |
| $\rho$                 |   | 7.750     | Fixo  | 7.750      |  | 7.750     | Fixo      | 7.750   |       |        |
| $\rho_A$               | Alterado  | 0.050     | Fixo  | 0.050      | Alterado   | 0.050     | Fixo      | 0.050   |       |        |
| $u_{xy}$               |   | 3.290     | Fixo  | 3.290      |  | 3.290     | Fixo      | 3.290   |       |        |
| $u_{xyA}$              |   | 3.290     | Fixo  | 3.290      |  | 3.290     | Fixo      | 3.290   |       |        |
| $U_{yz}$               |   | 3.530     | Fixo  | 3.530      |  | 3.530     | Fixo      | 3.530   |       |        |
| $h$                    |   | 1.820     | Fixo  | 1.820      |  | 1.820     | Fixo      | 1.820   |       |        |
| $h_1$                  |   | 1.020     | Fixo  | 1.020      |  | 1.020     | Fixo      | 1.020   |       |        |
| $lg_1$                 | 0.10  | 1.000     | 6.00  | 0.927      | 0.10   | 1.000     | 6.00      | 0.995   |       |        |
| $lg_2$                 | 0.10  | 1.000     | 6.00  | 1.118      | 0.10   | 1.000     | 6.00      | 1.019   |       |        |
| $lg_{A1}$              | 0.10  | 1.000     | 6.00  | 1.000      | 0.10   | 1.000     | 6.00      | 1.005   |       |        |
| $lg_{A2}$              | 0.10  | 1.000     | 6.00  | 0.548      | 0.10   | 1.000     | 6.00      | 1.003   |       |        |
| $lg_{A3}$              | 0.10  | 1.000     | 6.00  | 1.233      | 0.10   | 1.000     | 6.00      | 4.833   |       |        |
| $lg_{A4}$              | 0.10  | 1.000     | 6.00  | 0.536      | 0.10   | 1.000     | 6.00      | 1.064   |       |        |
| Valor objetivo         | 2.235   |           |   |            | 2.222  |           |           |   |       |        |
| Valor objetivo (comp.) | 3.012   |           |   |            | 2.892  |           |           |   |       |        |
| Desloc Modais finais   | 0.122   | 1.244     | -0.357  | 0.554      | -0.359   | 0.109     | 1.241     | -0.362  | 0.552 | -0.364 |
|                        | -0.518  | 0.644     | 0.529   | 0.315      | 0.591  | -0.515    | 0.620     | 0.514   | 0.307 | 0.586  |
|                        | 0.610   | -0.478    | -1.120  | 0.152      | 1.613  | 0.608     | -0.457    | -1.101  | 0.167 | 1.655  |
|                        | 3.867   | -1.863    | 1.222   | 1.204      | 1.830  | 3.881     | -1.807    | 1.225   | 1.202 | 1.798  |
|                        | -2.498  | -2.755    | 1.372   | 2.041      | 2.962  | -2.455    | -2.773    | 1.371   | 2.037 | 2.916  |
| Matriz MAC (cor)       |  |           |   |            |  |           |           |   |       |        |
|                        |   |           |   |            |  |           |           |   |       |        |
| F ref                  | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            | F ref  | F inicial | F final   | Correlação de frequências   |       |        |
| 11.5                   | 13.17   | 13.21     |  |            | 11.3   | 13.17     | 13.14     |  |       |        |
| 13.5                   | 14.85   | 14.88     |   |            | 13.8   | 14.85     | 14.82     |   |       |        |
| 26.2                   | 26.17   | 26.20     |   |            | 25.3   | 26.17     | 26.13     |   |       |        |
| 45                     | 44.93   | 44.99     |   |            | 44.9   | 44.93     | 44.90     |   |       |        |
| 72.7                   | 71.87   | 71.99     |   |            | 71.7   | 71.87     | 71.70     |   |       |        |

Tabela 7.13 Resultados obtidos nas análises de melhoramento do conjunto CPLP ligado por parafuso M5 e rebite de aço com excitação em f2

| Variável                | Modelo CPLPb (parafuso M5)  |           |   |            | Modelo CPLPi (rebite de aço)   |           |   |            |       |        |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|--|-----------|---|------------|-------|--------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.  | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |       |        |
| $E_x$                   |   | 1.690     | Fixo  | 1.690      | 1.52   | 1.690     | 1.86  | 1.689      |       |        |
| $E_{xA}$                |   | 1.690     | Fixo  | 1.690      | 1.18   | 1.690     | 2.20  | 1.689      |       |        |
| $E_y$                   |   | 1.940     | Fixo  | 1.940      | 1.75   | 1.940     | 2.13  | 1.940      |       |        |
| $\rho$                  |   | 7.750     | Fixo  | 7.750      | 6.20   | 7.750     | 8.52  | 7.739      |       |        |
| $\rho_A$                | Alterado  | 0.050     | Fixo  | 0.050      | 0.05   | 0.100     | 6.10  | 0.100      |       |        |
| $u_{xy}$                |   | 3.290     | Fixo  | 3.290      | 2.96   | 3.290     | 3.62  | 3.289      |       |        |
| $u_{xyA}$               |   | 3.290     | Fixo  | 3.290      | 1.65   | 3.290     | 4.94  | 3.290      |       |        |
| $U_{yz}$                |   | 3.530     | Fixo  | 3.530      |  | 3.530     | Fixo  | 1.857      |       |        |
| $h$                     |   | 1.820     | Fixo  | 1.820      | 1.64   | 1.820     | 2.00  | 1.017      |       |        |
| $h_1$                   |   | 1.020     | Fixo  | 1.020      | 0.92   | 1.020     | 1.12  | 3.000      |       |        |
| $lg_1$                  | 0.10  | 1.000     | 6.00  | 1.527      | 0.30   | 3.000     | 18.00   | 2.999      |       |        |
| $lg_2$                  | 0.10  | 1.000     | 6.00  | 1.291      | 0.30   | 3.000     | 18.00   | 0.997      |       |        |
| $lg_{A1}$               | 0.10  | 1.000     | 6.00  | 1.290      | 0.10   | 1.000     | 2.00  | 1.001      |       |        |
| $lg_{A2}$               | 0.10  | 1.000     | 6.00  | 1.301      | 0.10   | 1.000     | 2.00  | 1.000      |       |        |
| $lg_{A3}$               | 0.10  | 1.000     | 6.00  | 4.815      | 0.10   | 1.000     | 2.00  | 0.997      |       |        |
| $lg_{A4}$               | 0.10  | 1.000     | 6.00  | 1.477      | 0.10   | 1.000     | 2.00  | 1.689      |       |        |
| Valor objectivo         | 2.062   |           |   |            | 2.605  |           |   |            |       |        |
| Valor objectivo (comp.) | 2.610   |           |   |            | 2.310  |           |   |            |       |        |
| Desloc. Modais finais   | 0.076   | 1.244     | -0.366  | 0.565      | -0.324   | 0.122     | 1.241   | -0.369     | 0.575 | -0.272 |
|                         | -0.520  | 0.606     | 0.527   | 0.299      | 0.590  | -0.522    | 0.635   | 0.541      | 0.297 | 0.488  |
|                         | 0.599   | -0.442    | -1.110  | 0.160      | 1.700  | 0.605     | -0.470  | -1.084     | 0.139 | 1.456  |
|                         | 3.895   | -1.751    | 1.143   | 1.317      | 1.837  | 3.865     | -1.845  | 1.232      | 1.189 | 1.916  |
|                         | -2.397  | -2.823    | 1.366   | 2.087      | 2.751  | -2.448    | -2.577  | 1.386      | 1.746 | 2.973  |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |  |           |   |            |       |        |
|                         |   |           |   |            |  |           |   |            |       |        |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   | F ref      | F inicial  | F final   | Correlação de frequências   |            |       |        |
| 11.3                    | 13.17   | 12.81     |  | 11.8       | 13.16  | 13.15     |  |            |       |        |
| 13.9                    | 14.85   | 14.87     |   | 13.4       | 14.81  | 14.78     |   |            |       |        |
| 27.1                    | 26.17   | 26.21     |   | 26.4       | 26.18  | 26.17     |   |            |       |        |
| 44.6                    | 44.93   | 44.61     |   | 44.9       | 44.81  | 44.88     |   |            |       |        |
| 72.4                    | 71.87   | 72.37     |   | 72.8       | 72.24  | 72.69     |   |            |       |        |

Concluindo, os resultados obtidos não atingiram o esperado tanto a nível dos modos de vibração como das frequências naturais, principalmente no que respeita ao primeiro modo. Os conjuntos de peças CPLPa e CPLPc diferem entre si devido a serem constituídos por placas principais diferentes. No primeiro conjunto foi utilizada a placa PLPb, que apresenta melhores valores no seu próprio melhoramento, correlacionando-se agora melhor como modelo de referência do conjunto. No conjunto CPLPc é utilizada a placa PLPa e não foi possível obter tão bons resultados. Também no melhoramento do modelo do conjunto se obtém um melhor melhoramento. Mas de uma forma geral os resultados de pior qualidade devem-se ao efeito do modelo da placa secundária, PLS, dado que esta apresenta modos de vibração de frequência mais baixa e, conseqüentemente, os valores encontrados para os primeiros modos de vibração do conjunto estão essencialmente influenciados por esta placa. As placas secundárias, quando analisadas individualmente, não se conseguem melhorar suficientemente e tal condiciona os resultados obtidos no melhoramento do conjunto. Os valores encontrados pelas variáveis após os melhoramentos não apresentam desvios significativos em relação aos iniciais pelo que se podem considerar ainda fisicamente realistas.

## **7.5 Melhoramento dos Modelos de Elementos Finitos a Partir dos Resultados dos Modelos Melhorados.**

Da avaliação dos resultados obtidos no melhoramento dos modelos individuais é possível, mesmo assim, obter melhoramentos significativos. A correlação obtida para o primeiro modo de vibração é quase sempre fraca devido à dificuldade em obter resultados experimentais de maior qualidade. Mesmos nestas circunstâncias considera-se que:

- 1 – Os modelos melhorados reproduzem minimamente os resultados experimentais de referência;
- 2 – Nos melhoramentos há sempre convergência no processo de iteração, apenas não se garante que o ótimo obtido seja absoluto. No entanto outros testes com valores iniciais alterados são executados e os mínimos obtidos não são melhores que os apresentados, pelo que se conclui que os mínimos obtidos são os melhores;



- 3 – Os parâmetros escolhidos, principalmente os associados à alteração do modelo inicial, aos quais é permitido ter maior campo de variação, possibilitam manter a sua coerência física e robustez.

Face aos resultados obtidos, uma forma complementar de verificar se os melhoramentos são representativos é precisamente através do seu uso no melhoramento dos modelos dos conjuntos onde se incorporam e verificar se o melhoramento ainda é possível. Assim, concluído o melhoramento de todos os modelos das subestruturas individuais a partir dos parâmetros iniciais, pode-se colocar a questão da possibilidade de conseguir melhorar ainda mais os modelos de elementos finitos dos conjuntos utilizando como parâmetros iniciais os valores já melhorados dessas variáveis suas constituintes. Se um modelo após o melhoramento mantiver a sua validade física, então os seus parâmetros melhorados podem ser utilizados como valores iniciais nos modelos do conjunto esperando-se que o melhoramento final apresente melhores resultados. Para testar esta hipótese utiliza-se o modelo de elementos finitos do subconjunto PLG e tentam-se obter melhores resultados para a função objectivo de comparação do conjunto, introduzindo os valores dos parâmetros obtidos num dos melhoramentos da placa PLP.

Os melhores resultados obtidos no melhoramento da placa PLP são conseguidos na terceira análise e estão apresentados na tabela 7.3. Na tabela 7.14 mostra-se a forma de atribuição dos valores aos parâmetros iniciais do modelo a melhorar. O valor inicial atribuído ao parâmetro  $lg_I$  de 5.974 foi obtido por análise específica sobre esta variável, fazendo-a variar apenas dentro dos limites admitidos, mantendo as restantes fixas. Os parâmetros associados às vigas de ligação mantêm-se com as designações  $E_{xA}$ ,  $u_{xyA}$ ,  $\rho_A$  e  $lg_I$  mas, tendo em conta os resultados obtidos anteriormente, apenas foram considerados como variáveis os parâmetros  $\rho_A$  e  $lg_I$ , mantendo-se os outros dois fixos. Na tabela 7.15 apresentam-se os resultados obtidos após o melhoramento com o valor da função objectivo de comparação, a ficar aquém do esperado.

Para os restantes modelos ensaiados obtêm-se as funções objectivo os valores apresentadas na tabela 7.16. Conforme se pode observar nesta tabela, na maior parte dos modelos o melhoramento que utiliza os valores iniciais dos parâmetros melhorados, foram inferiores aos obtidos pelo melhoramento que utiliza directamente os valores iniciais. Analisando estes resultados, pode-se concluir que o melhor melhoramento é conseguido nos modelos cuja função objectivo de comparação obtida com os parâmetros iniciais dá

valores mais altos. Nestes casos o modelo melhorado é pior, pelo que os resultados obtidos utilizando valores iniciais melhorados dos parâmetros suplantam os primeiros. Na tabela 7.15 apresentam-se os resultados obtidos com o melhoramento nas duas condições, com e sem os parâmetros iniciais melhorados, para o modelo  $PLG_f$  onde se nota a maior diferença na melhoria dos resultados. Pode-se concluir que nem sempre um segundo melhoramento conduz a uma melhor solução óptima.

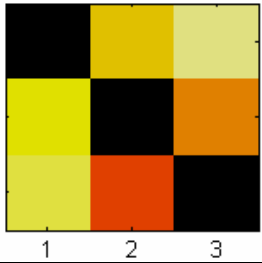
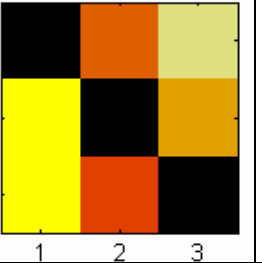
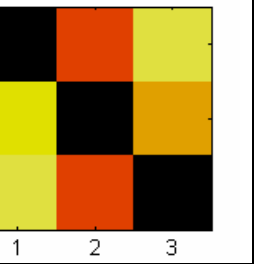
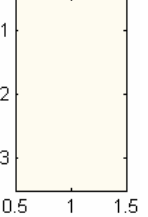
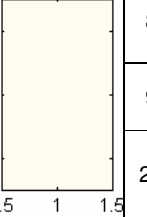
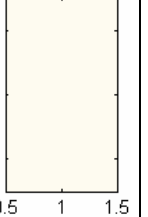
Tabela 7.14 Atribuição dos valores melhorados dos parâmetros da placa PLP aos iniciais do subconjunto PLG, excitação em f1

|                 |                                      |
|-----------------|--------------------------------------|
| $E_x=1.859$     | Valor melhorado do PLP               |
| $E_{xA}=1.690$  | Variável associada à viga de ligação |
| $E_y=2.134$     | Valor melhorado do PLP               |
| $\rho=10.068$   | Valor melhorado do PLP               |
| $\rho_A=0.5$    | Variável associada à viga de ligação |
| $U_{xy}=3.417$  | Valor melhorado do PLP               |
| $U_{xyA}=3.29$  | Variável associada à viga de ligação |
| $U_{yz}=3.53$   | Valor fixo comum                     |
| $h=2.002$       | Valor melhorado do PLP               |
| $I_{g1}=5.974$  | Variável associada à viga de ligação |
| $I_{gA1}=6.762$ | Valor melhorado do PLP               |
| $I_{gA2}=6.762$ | Valor melhorado do PLP               |

O modelo  $PLG_f$  com excitação em f1 é o que melhor traduz a melhoria consequente do segundo melhoramento. Isto é devido à pior qualidade dos resultados do modelo no melhoramento feito com os valores iniciais.

Ao utilizar a análise de sensibilidade para escolher os melhores valores dos parâmetros iniciais em ambos os casos, tanto no primeiro melhoramento como no segundo para o qual se parte de valores já melhorados, obtêm-se resultados que já são bastante bons. Consequentemente os resultados obtidos após o segundo melhoramento sejam pouco melhores, ou mesmo piores, devido aos campos de variação das variáveis não serem iguais. Partindo deste princípio, decide-se então fazer as mesmas análises nos modelos com excitação em f2, onde a maior parte dos resultados da função objectivo de comparação são piores e, portanto, a possibilidade de melhoramento utilizando os valores dos parâmetros melhorados da placa principal é maior.

Tabela 7.15 Os melhores resultados obtidos nas análises de melhoramento do subconjunto PLG com excitação em f1

| Variável                | PLGh<br>(com parâmetros melhorados)   |           |   |            | PLGf<br>(com parâmetros iniciais)  |           |  |            | PLGf<br>(com parâmetros melhorados)   |           |   |            |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|--|-----------|--|------------|---|-----------|---|------------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.  | Val. Ini. | Lim. Sup.  | Val. final | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |
| $E_x$                   | 1.67  | 1.859     | 2.05  | 2.012      | 1.52   | 1.690     | 2.20   | 1.690      | 1.67  | 1.859     | 2.05  | 1.910      |
| $E_y$                   | 1.92  | 2.134     | 2.35  | 2.119      | 1.75   | 1.940     | 2.52   | 1.940      | 1.92  | 2.134     | 2.35  | 2.193      |
| $\rho$                  | 9.06  | 10.069    | 11.08   | 9.944      | 5.42   | 7.750     | 10.07  | 7.745      | 9.06  | 10.069    | 11.08   | 10.346     |
| $\rho_A$                | 0.45  | 0.500     | 4.50  | 2.233      | 0.45   | 0.500     | 4.50   | 3.343      | 0.45  | 0.500     | 4.50  | 3.026      |
| $u_{xy}$                | 3.08  | 3.417     | 3.76  | 3.378      | 2.96   | 3.290     | 4.28   | 3.290      | 3.08  | 3.417     | 3.76  | 3.512      |
| $h$                     | 1.80  | 2.002     | 2.20  | 1.979      | 1.64   | 1.820     | 2.37   | 1.820      | 1.80  | 2.002     | 2.20  | 2.057      |
| $lg_1$                  | 0.60  | 5.974     | 35.84   | 16.766     | 0.60   | 5.970     | 11.95  | 5.974      | 0.60  | 5.974     | 35.84   | 19.823     |
| $lg_{A1}$               | 0.68  | 6.762     | 13.52   | 6.541      | 0.10   | 1.000     | 11.00  | 1.000      | 0.68  | 6.762     | 13.52   | 8.853      |
| $lg_{A2}$               | 0.68  | 6.762     | 13.52   | 6.603      | 0.10   | 1.000     | 11.00  | 1.000      | 0.68  | 6.762     | 13.52   | 8.854      |
| Valor objectivo         | 0.582   |           |   |            | 0.994  |           |  |            | 0.554   |           |   |            |
| Valor objectivo (comp.) | 1.831   |           |   |            | 3.467  |           |  |            | 2.505   |           |   |            |
| Desloc. nodais          | 1.271   | 0.765     | -0.947  |            | 1.490  | 1.221     | -1.252   |            | 1.149   | 0.697     | -0.830  |            |
|                         | -1.089  | 1.136     | 0.947   |            | -1.503   | 1.258     | 1.267  |            | -1.021  | 1.019     | 0.839   |            |
|                         | -1.979  | 1.762     | -2.355  |            | -2.613   | 1.749     | -2.726   |            | -1.912  | 1.673     | -2.248  |            |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |  |           |  |            |  |           |   |            |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            | F inicial  | F final   | Correlação de frequências  |            | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            |
| 87.5                    | 89.0  | 87.6      |  |            | 89.5   | 89.0      |  |            | 89.0  | 87.1      |  |            |
| 90.2                    | 92.3  | 92.5      |   |            | 91.8   | 91.5      |  |            | 92.3  | 92.3      |   |            |
| 216.2                   | 216.5   | 216.2     |   |            | 216.6  | 215.7     |  |            | 216.5   | 215.7     |   |            |

No melhoramento dos vários modelos PLG, com excitação em f2 utilizam-se os parâmetros melhorados, obtidos do melhor modelo melhorado da placa principal PLPb, procedendo à optimização utilizando as mesmas variáveis que no caso anterior com a excitação em f1. Verifica-se que os melhoramentos obtidos também não são melhores que

os obtidos directamente da optimização, partindo dos valores iniciais dos parâmetros. Na tabela 7.17 mostram-se os valores encontrados para os modelos de PLGa a PLGe. Dados que os resultados obtidos estão aquém da expectativa, decide-se tentar outras alternativas, apresentadas na tabela 7.17. Na tabela 7.17 também se mostram os resultados obtidos para os modelos PLGa e PLGb.

Tabela 7.16 Resultados obtidos no melhoramento do modelo de elementos finitos em relação às análises da placa PLG, excitação em f1

| Modelo Experimental       |                   | Com os parâmetros iniciais |                               | Com os parâmetros melhorados (PLPb) |                               |
|---------------------------|-------------------|----------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| Designação do subconjunto | Formado por       | Valor objectivo            | Valor objectivo de comparação | Valor objectivo                     | Valor objectivo de comparação |
| PLGa                      | PLP13b + LIG205b2 | 1.149                      | 3.237                         | 1.337                               | 3.602                         |
| PLGb                      | PLP13a + LIG205b1 | 1.422                      | 2.427                         | 1.200                               | 2.554                         |
| PLGc                      | PLP13b + LIG205b1 | 1.130                      | 3.547                         | 1.143                               | 3.552                         |
| PLGd                      | PLP13a + LIG205b2 | 1.121                      | 3.347                         | <b>1.126</b>                        | <b>3.344</b>                  |
| PLGe                      | PLP13a + LIG205b4 | 0.994                      | 5.174                         | Não realizado                       |                               |
| PLGf                      | PLP13b+ LIG205b3  | 0.994                      | 3.467                         | <b>0.554</b>                        | <b>2.505</b>                  |
| PLGg                      | PLP13a+ LIG205b3  | 1.373                      | 3.323                         | Não realizado                       |                               |
| PLGh                      | PLP13b+ LIG205b4  | <b>0.864</b>               | <b>1.671</b>                  | 0.582                               | 1.831                         |

Analisando os valores obtidos nos parâmetros melhorados da placa PLP, na terceira análise apresentada na tabela 7.3, verifica-se que são muito diferentes dos iniciais com que se partiu para o melhoramento dessa placa, aproximando-se do limite superior permitido. Analisando os valores dos parâmetros obtidos para o modelo na segunda análise, constata-se que estes sofreram menores alterações, mantendo-se ainda próximos dos valores iniciais. Este modelo não atinge uma função objectivo de comparação tão boa mas, mesmo assim, é suficiente para possibilitar a utilização dos valores dos parâmetros melhorados na optimização do subconjunto PLG. Os resultados desse melhoramento estão apresentados na tabela 7.18, utilizando apenas como variáveis os parâmetros associados com as vigas de ligação entre as placas. Pode observar-se que a maior parte dos valores obtidos pela função objectivo de comparação apresentam agora melhores valores, em relação aos obtidos com o melhoramento do mesmo modelo, mas partindo dos valores iniciais dos parâmetros sendo estes obtidos exclusivamente à custa da alteração das propriedades do elemento de ligação da viga. Na tabela 7.19 apresentam-se os resultados completos para o caso do modelo PLGh.

Tabela 7.17 Resultados obtidos no melhoramento do modelo de elementos finitos em relação às análises da placa PLG, excitação em f2

| Modelo Experimental       | Com os parâmetros iniciais e otimização de todas as variáveis |                               | Com os parâmetros melhorados (PLPb) e otimização de todas as variáveis |                               | Com os parâmetros melhorados (PLPb) e otimização das variáveis de ligação |                               | Com os parâmetros melhorados (PLPb) e otimização das variáveis de ligação por campos |                               | Com os parâmetros melhorados (PLPb) e otimização das variáveis de ligação por campos e PRLGA1 fixa |                               |
|---------------------------|---|-------------------------------|--|-------------------------------|---|-------------------------------|--|-------------------------------|--|-------------------------------|
| Designação do subconjunto | Valor objectivo   | Valor objectivo de comparação | Valor objectivo  | Valor objectivo de comparação | Valor objectivo   | Valor objectivo de comparação | Valor objectivo  | Valor objectivo de comparação | Valor objectivo  | Valor objectivo de comparação |
| PLGa                      | 1.29  | 3.02                          | 1.11   | 3.20                          | 1.17  | 3.18                          | 1.18   | 3.20                          | 1.18   | 3.20                          |
| PLGb                      | 0.73  | 3.46                          | 0.89   | 4.19                          | 0.89  | 4.21                          | 0.92   | 4.18                          | Tentativas não realizadas  |                               |
| PLGc                      | 1.08  | 1.36                          | 0.37   | 2.08                          |   |                               |  |                               |  |                               |
| PLGd                      | 0.92  | 2.84                          | 0.89   | 3.62                          |   |                               |  |                               |  |                               |
| PLGe                      | 1.18  | 5.57                          | 0.78   | 6.01                          |   |                               |  |                               |  |                               |
| PLGf                      | 1.36  | 3.68                          |  |                               |   |                               |  |                               | 0.86   | 3.13                          |
| PLGg                      | 0.79  | 2.51                          |  |                               |   |                               |  |                               | 0.94   | 2.62                          |
| PLGh                      | -0.06   | 10.72                         |  |                               |   |                               |  |                               |  |                               |

Pode concluir-se que com esta iniciativa foram conseguidos melhores resultados dos modelos de elementos finitos formados por conjuntos de peças, partindo dos valores melhorados dos seus componentes, desde que nessa melhoria, os parâmetros melhorados ainda se mantenham realistas. Perante os resultados obtidos neste estudo e com estes protótipos conclui-se ser necessário realizar outros exemplos de forma a encontrar um modelo mais consistente para este tipo de análise.

Aplicando aos conjuntos CPLP o mesmo princípio é necessário aumentar o número de variáveis envolvido. Existem valores de parâmetros iniciais que provêm do modelo PLG e outros do PLS, ambos melhorados, que interessa introduzir no novo modelo de elementos finitos. Na tabela 7.20 descrevem-se os parâmetros variáveis e a sua proveniência. O número de variáveis é muito elevado pelo que se faz uma primeira análise de sensibilidade sobre estas. Observa-se que as variáveis  $u_{yz}$ ,  $u_{yzI}$ ,  $E_{xA}$  e,  $u_{xyA}$  têm pouca influência, pelo que são fixadas nos seus valores iniciais, como se observa na tabela 7.20. Os parâmetros  $\rho_A$  e  $lg_2$ , que representam respectivamente a densidade e a largura das vigas de secção quadrada de ligação entre o subconjunto PLG e a placa PLS, apresentam-se

como variáveis novas a que se atribuem valores iniciais de 0.5 e 1, respectivamente. Para as restantes variáveis atribuem-se os valores melhorados, obtidos nos melhoramentos dos respectivos modelos de componentes, escolhendo cada um de acordo com o processo de ligação adoptado, como se apresenta na tabela 7.21, tendo-se atribuído o campo de variação de  $\pm 10\%$ .

Tabela 7.18 - Resultados obtidos no melhoramento do modelo de elementos finitos em relação às análises da placa PLG, excitação em f2, utilizando o valor dos parâmetros melhorados na segunda análise da placa PLPb

| Modelo Experimental       | Com os parâmetros iniciais e optimização de todas as variáveis |                               | Com os parâmetros melhorados (PLPb análise 2) e optimização das variáveis de ligação por campos e PRLGA1 fixa |                               |
|---------------------------|--|-------------------------------|---|-------------------------------|
| Designação do subconjunto | Valor objectivo  | Valor objectivo de comparação | Valor objectivo   | Valor objectivo de comparação |
| PLGa                      | 1.29   | 3.02                          | <b>1.09</b>   | <b>2.79</b>                   |
| PLGb                      | 0.73   | 3.46                          | 0.93  | 3.69                          |
| PLGc                      | <b>1.08</b>  | <b>1.36</b>                   | 0.44  | 1.62                          |
| PLGd                      | 0.92   | 2.84                          | 0.96  | 3.12                          |
| PLGe                      | 1.18   | 5.57                          | <b>0.78</b>   | <b>5.34</b>                   |
| PLGf                      | 1.36   | 3.68                          | <b>0.77</b>   | <b>2.71</b>                   |
| PLGg                      | 0.79   | 2.51                          | <b>0.81</b>   | <b>2.21</b>                   |
| PLGh                      | -0.06  | 10.72                         | <b>0.93</b>   | <b>2.11</b>                   |

Não se consegue, em qualquer dos modelos, melhoramentos cujo valor objectivo de comparação seja melhor que o obtido nas análises a partir dos valores iniciais. Os resultados podem ser observados nas tabelas 7.22 a 7.24, respectivamente o conjunto CPLPa que materializa a ligação por rebite de alumínio, o conjunto CPLPb que materializa a ligação por parafuso M5 e o conjunto CPLPi que materializa a ligação por rebite de aço.

Pode observar-se uma vez mais que o primeiro modo de vibração é o mais difícil de correlacionar. No entanto, as optimizações convergem para valores não muito superiores, o que leva a concluir que os valores dos parâmetros utilizados têm algum sentido, pois permitem conduzir o processo de melhoramento do modelo de elementos finitos para características dinâmicas que se aproximaram do modelo experimental. A prova disso é

que o MAC e a correlação de frequências obtidos apresentam valores tais que permitem afirmar que os modelos estão próximos.

Tabela 7.19 Os melhores resultados obtidos nas análises de melhoramento da subconjunto PLG com excitação em f2

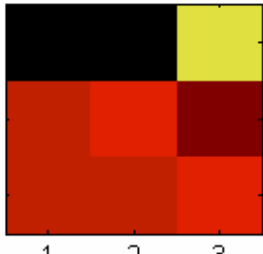
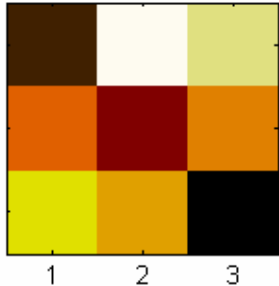
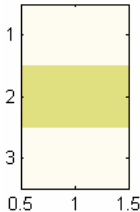
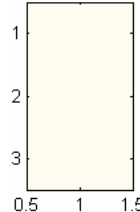
| Variável                | PLGh com parâmetros iniciais  |           |   |            | PLGh com parâmetros melhorados   |           |   |            |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|--|-----------|---|------------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.  | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |
| $E_x$                   | 1.35  | 1.690     | 2.03  | 1.653      | -  | 1.740     | fixo  | 1.738      |
| $E_{xA}$                | 1.18  | 1.690     | 2.54  | 1.784      | 1.18   | 1.690     | 2.20  | 1.689      |
| $E_y$                   | 1.55  | 1.940     | 2.33  | 1.901      | -  | 1.910     | fixo  | 1.738      |
| $\rho$                  | 6.20  | 7.750     | 9.29  | 7.590      | -  | 7.960     | fixo  | 1.738      |
| $\rho_A$                | 0.08  | 0.100     | 1.10  | 0.538      | 0.05   | 0.100     | 6.10  | 3.275      |
| $u_{xy}$                | 2.63  | 3.290     | 3.95  | 3.217      | -  | 3.380     | fixo  | 1.738      |
| $u_{xyA}$               | 2.30  | 3.290     | 4.94  | 3.472      | 1.65   | 3.290     | 4.94  | 3.387      |
| $u_{yz}$                | 2.82  | 3.530     | 4.24  | 3.451      | -  | 3.530     | fixo  | 1.738      |
| $h$                     | 1.46  | 1.820     | 2.18  | 1.780      | -  | 1.860     | fixo  | 1.738      |
| $lg_1$                  | 0.38  | 3.800     | 11.40   | 10.185     | 0.18   | 1.800     | 10.80   | 5.748      |
| $lg_{A1}$               | 0.21  | 2.100     | 6.30  | 2.917      | -  | 5.130     | fixo  | 5.130      |
| Valor objectivo         | -0.061  |           |   |            | 0.925  |           |   |            |
| Valor objectivo (comp.) | 10.718  |           |   |            | 2.107  |           |   |            |
| Desloc. Modais finais   | -0.0006   | 1.0260    | 1.2340  |            | 1.0819   | 1.5518    | 1.1434  |            |
|                         | 0.0009  | -1.8085   | -1.2778   |            | -1.6318  | 0.6958    | -1.1740   |            |
|                         | 0.0017  | -3.1227   | 2.7922  |            | -2.9293  | 0.8799    | 2.6766  |            |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |  |           |   |            |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            | F inicial  | F final   | Correlação de frequências   |            |
| 86.2                    | 89.13   | 86.22     |  |            | 88.41  | 88.16     |  |            |
| 91.1                    | 216.39  | 86.64     |   |            | 92.63  | 92.32     |   |            |
| 217.5                   | 237.96  | 210.84    |   |            | 215.85   | 216.20    |   |            |

Tabela 7.20 Parâmetros variáveis do conjunto CPLP e a sua proveniência em relação aos modelos dos componentes

| Parâmetro | Descrição  | Proveniência                              |
|-----------|--|---|
| $E_x$     | Modulo Elasticidade Ex-PLG   | Valor melhorado do PLP                    |
| $E_{x1}$  | Modulo Elasticidade Ex-PLS   | Valor melhorado do PLS                    |
| $E_{xA}$  | Modulo Elasticidade Ex-viga de ligação                                   | Valor fixo ( $=0.69 \times 10^{+1}$ )     |
| $E_y$     | Modulo Elasticidade Ey-PLG   | Valor melhorado do PLP                    |
| $E_{y1}$  | Modulo Elasticidade Ey-PLS   | Valor melhorado do PLS                    |
| $\rho$    | Densidade-PLG  | Valor melhorado do PLG                    |
| $\rho_1$  | Densidade-PLS  | Valor melhorado do PLS                    |
| $\rho_A$  | Densidade da viga de ligação   | ligação LIG-PLS ( $0.05 \times 10^{+1}$ ) |
| $u_{xy}$  | Coef. de Poisson xy-PLG  | Valor melhorado do PLP                    |
| $u_{xy1}$ | Coef. de Poisson xy-PLS  | Valor fixo (Valor PLS)                    |
| $u_{xyA}$ | Coef. de Poisson xy- viga de ligação                                     | Valor fixo ( $0.329 \times 10^{+1}$ )     |
| $u_{yz}$  | Coef. de Poisson yz-PLG  | Valor fixo ( $0.353 \times 10^{+1}$ )     |
| $u_{yz1}$ | Coef. de Poisson yz-PLS  | Valor fixo ( $0.353 \times 10^{+1}$ )     |
| $h$       | Espessura da placa-PLG   | Valor melhorado do PLG                    |
| $h_1$     | Espessura da placa-PLS   | Valor melhorado do PLS                    |
| $lg_1$    | Largura das vigas de ligação entre peças PLP-LIG                         | Valor melhorado do PLG                    |
| $lg_2$    | Largura das vigas de ligação entre peças PLG-PLS                         | Valor inicial ( $0.1 \times 10^{+1}$ )    |
| $lg_{A1}$ | Flexibilização da parte central da placa PLS                             | Valor melhorado do PLS                    |
| $lg_{A2}$ | Coefficiente da massa do Acelerómetro em 4 pontos                        | Valor PLG por opção                       |
| $lg_{A3}$ | Coefficiente da massa do Transdutor força com Acelerómetro (em 4 pontos) | Valor melhorado do PLS                    |
| $lg_{A4}$ | Massa do Acelerómetro nos pontos A3 e A4                                 | Valor melhorado do PLS                    |

Não se esperam melhores resultados no melhoramento dos conjuntos, uma vez que os modelos individuais melhorados, principalmente das placas PLS também já não são bem correlacionados com os respectivos modelos experimentais. Desta forma pode concluir-se que embora não se tenham conseguido obter modelos de elementos finitos bem correlacionados, é claro que a existência de modelos e protótipos experimentais mais adequados e com maior número de GDL possibilitam aumentar a qualidade dos resultados. No que respeita à tentativa de melhorar apenas os parâmetros relacionados com a ligação entre modelos conclui-se que os resultados obtidos estão ainda mais afastados dos óptimos que os aqui expostos.

Tabela 7.21 – Modelos melhorados de onde foram retirados os valores para melhorar o modelo de elementos finitos do conjunto CPLP

|       | Conjunto        | Subconjunto PLG    | Placa secundária PLS   |
|-------|-----------------|--------------------|------------------------|
| CPLPa | Excitação em f1 | PLGf (tabela 7.14) | Análise 1 (tabela 7.5) |
|       | Excitação em f2 | PLGh (tabela 7.18) | Análise 1 (tabela 7.6) |
| CPLPb | Excitação em f1 | PLGf (tabela 7.14) | Análise 2 (tabela 7.3) |
|       | Excitação em f2 | PLGh (tabela 7.18) | Análise 2 (tabela 7.4) |
| CPLPi | Excitação em f1 | PLGf (tabela 7.14) | Análise 2 (tabela 7.5) |
|       | Excitação em f2 | PLGh (tabela 7.18) | Análise 2 (tabela 7.6) |



Tabela 7.22 Resultados obtidos nas análises de melhoramento do conjunto modelo CPLPa

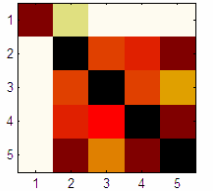
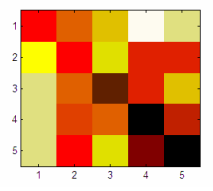
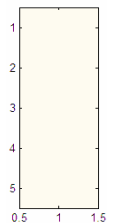
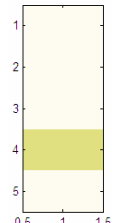
| Variável                | Excitação em f1   |           |   |            | Excitação em f2   |           |           |   |        |        |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|---|-----------|-----------|---|--------|--------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup. | Val. final  |        |        |
| $E_x$                   | 1.72  | 1.910     | 2.10  | 1.802      | 1.56  | 1.740     | 1.91      | 1.842   |        |        |
| $E_{x1}$                | 1.49  | 1.650     | 1.82  | 1.557      | 1.49  | 1.650     | 1.82      | 1.750   |        |        |
| $E_y$                   | 1.97  | 2.190     | 2.41  | 2.069      | 1.72  | 1.910     | 2.10      | 2.023   |        |        |
| $E_{y1}$                | 1.70  | 1.890     | 2.08  | 1.768      | 1.70  | 1.890     | 2.08      | 2.002   |        |        |
| $\rho$                  | 8.28  | 10.350    | 15.52   | 9.816      | 6.37  | 7.970     | 11.95     | 10.828  |        |        |
| $\rho_1$                | 6.04  | 7.550     | 11.32   | 7.123      | 6.04  | 7.550     | 11.32     | 7.089   |        |        |
| $\rho_A$                | 0.25  | 0.500     | 0.75  | 0.364      | 1.64  | 3.280     | 4.91      | 4.257   |        |        |
| $u_{xy}$                | 3.16  | 3.510     | 3.86  | 3.341      | 3.04  | 3.380     | 3.72      | 3.580   |        |        |
| $u_{xy1}$               | 2.88  | 3.200     | 3.52  | 3.050      | 2.88  | 3.200     | 3.52      | 3.395   |        |        |
| $h$                     | 1.85  | 2.060     | 2.26  | 1.942      | 1.68  | 1.860     | 2.05      | 1.973   |        |        |
| $h_1$                   | 0.89  | 0.990     | 1.09  | 1.021      | 0.89  | 0.990     | 1.09      | 1.046   |        |        |
| $lg_1$                  | 1.98  | 19.820    | 79.29   | 17.444     | 0.58  | 5.750     | 22.99     | 8.508   |        |        |
| $lg_2$                  | 0.10  | 1.000     | 4.00  | 0.836      | 0.10  | 1.000     | 4.00      | 3.220   |        |        |
| $lg_{A1}$               | 0.22  | 2.190     | 4.38  | 0.937      | 0.22  | 2.190     | 4.38      | 3.549   |        |        |
| $lg_{A2}$               | 0.71  | 7.130     | 14.26   | 3.424      | 0.51  | 5.130     | 10.26     | 8.311   |        |        |
| $lg_{A3}$               | 0.32  | 3.150     | 6.29  | 1.512      | 0.32  | 3.150     | 6.29      | 5.098   |        |        |
| $lg_{A4}$               | 0.31  | 3.080     | 6.17  | 1.544      | 0.31  | 3.080     | 6.17      | 4.999   |        |        |
| Valor objectivo         | 0.553   |           |   |            | 1.278   |           |           |   |        |        |
| Valor objectivo (comp.) | 1.290   |           |   |            | 4.809   |           |           |   |        |        |
| Desloc. Modais finais   | 0.213   | 1.096     | -0.279  | 0.427      | -0.287  | -0.298    | 0.959     | -0.227  | -0.345 | -0.325 |
|                         | -0.382  | 0.587     | 0.407   | 0.244      | 0.514   | -0.450    | 0.300     | 0.382   | -0.191 | 0.571  |
|                         | 0.483   | -0.395    | -0.840  | 0.087      | 1.296   | 0.423     | -0.126    | -0.810  | -0.084 | 1.509  |
|                         | 3.818   | -2.295    | 1.283   | 1.311      | 1.971   | 4.289     | -0.540    | 0.417   | -2.160 | 1.573  |
|                         | -2.888  | -2.644    | 1.206   | 2.266      | 3.170   | -1.436    | -3.424    | 1.246   | -2.126 | 2.009  |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |  |           |           |   |        |        |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            | F ref   | F inicial | F final   | Correlação de frequências   |        |        |
| 12.8                    | 11.42   | 12.80     |  |            | 11.5  | 11.57     | 11.50     |  |        |        |
| 13.3                    | 12.77   | 13.74     |   |            | 13.5  | 13.67     | 13.56     |   |        |        |
| 26.3                    | 23.70   | 25.44     |   |            | 26.2  | 24.26     | 25.35     |   |        |        |
| 44.9                    | 41.11   | 44.11     |   |            | 45  | 41.58     | 42.76     |   |        |        |
| 72.8                    | 68.99   | 72.82     |   |            | 72.7  | 68.27     | 70.36     |   |        |        |

Tabela 7.23 Resultados obtidos nas análises de melhoramento do conjunto modelo CPLPb

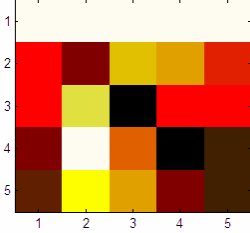
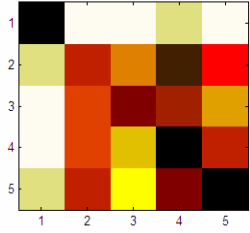
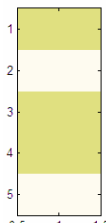
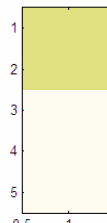
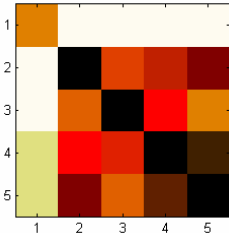
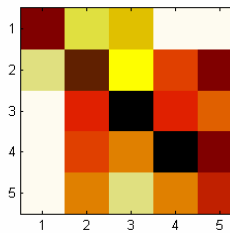
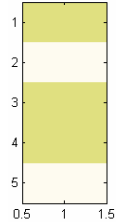
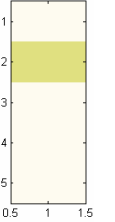
| Variável                | Excitação em f1   |           |   |            | Excitação em f2  |           |   |            |        |        |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|--|-----------|---|------------|--------|--------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.  | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |        |        |
| $E_x$                   | 1.72  | 1.910     | 2.10  | 1.719      | 1.56   | 1.740     | 1.91  | 1.751      |        |        |
| $E_{x1}$                | 1.56  | 1.740     | 1.91  | 1.564      | 1.66   | 1.840     | 2.03  | 1.857      |        |        |
| $E_y$                   | 1.97  | 2.190     | 2.41  | 1.973      | 1.72   | 1.910     | 2.10  | 1.923      |        |        |
| $E_{y1}$                | 1.79  | 1.990     | 2.19  | 2.039      | 1.92   | 2.130     | 2.34  | 2.147      |        |        |
| $\rho$                  | 8.28  | 10.350    | 15.52   | 10.573     | 6.37   | 7.970     | 11.95   | 7.963      |        |        |
| $\rho_1$                | 5.92  | 7.400     | 11.10   | 5.920      | 5.92   | 7.400     | 11.10   | 7.998      |        |        |
| $\rho_A$                | 0.35  | 0.500     | 0.65  | 0.582      | 3.89   | 7.770     | 11.66   | 7.774      |        |        |
| $u_{xy}$                | 3.16  | 3.510     | 3.86  | 3.371      | 3.04   | 3.380     | 3.72  | 3.354      |        |        |
| $u_{xy1}$               | 3.04  | 3.380     | 3.72  | 3.042      | 2.98   | 3.310     | 3.64  | 3.295      |        |        |
| $h$                     | 1.85  | 2.060     | 2.26  | 2.262      | 1.68   | 1.860     | 2.05  | 1.876      |        |        |
| $h_1$                   | 0.94  | 1.050     | 1.15  | 0.940      | 1.01   | 1.120     | 1.23  | 1.119      |        |        |
| $lg_1$                  | 1.98  | 19.820    | 39.65   | 19.825     | 0.58   | 5.750     | 22.99   | 5.749      |        |        |
| $lg_2$                  | 0.10  | 1.000     | 2.00  | 1.274      | 0.10   | 1.000     | 4.00  | 0.991      |        |        |
| $lg_{A1}$               | 0.35  | 3.550     | 3.90  | 2.483      | 0.39   | 3.900     | 7.81  | 3.880      |        |        |
| $lg_{A2}$               | 0.51  | 5.110     | 5.62  | 5.105      | 0.39   | 3.940     | 7.88  | 3.939      |        |        |
| $lg_{A3}$               | 0.51  | 5.110     | 5.62  | 5.128      | 0.40   | 3.980     | 7.96  | 3.981      |        |        |
| $lg_{A4}$               | 0.51  | 5.110     | 5.62  | 5.084      | 0.40   | 3.970     | 7.95  | 3.964      |        |        |
| Valor objectivo         | 3.009   |           |   |            | 2.043  |           |   |            |        |        |
| Valor objectivo (comp.) | 4.921   |           |   |            | 1.018  |           |   |            |        |        |
| Desloc. Modais finais   | -0.336  | 0.921     | -0.196  | -0.350     | -0.085   | -0.234    | 1.180   | -0.346     | -0.540 | -0.246 |
|                         | -0.481  | 0.291     | 0.344   | -0.179     | 0.153  | -0.539    | 0.464   | 0.567      | -0.276 | 0.478  |
|                         | 0.432   | -0.073    | -0.637  | -0.032     | 0.552  | 0.520     | -0.309  | -1.187     | -0.120 | 1.541  |
|                         | 4.785   | -0.277    | 0.707   | -1.970     | 2.712  | 3.796     | -0.976  | 0.397      | -1.960 | 1.554  |
|                         | 5.087   | -0.351    | 0.686   | -2.413     | 3.273  | -1.724    | -3.032  | 1.387      | -2.090 | 2.207  |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |  |           |   |            |        |        |
|                         |   |           |   |            |  |           |   |            |        |        |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   | F ref      | F inicial  | F final   | Correlação de frequências   |            |        |        |
| 10.5                    | 11.31   | 11.16     |  | 11.3       | 12.41  | 12.00     |  |            |        |        |
| 12.8                    | 13.60   | 12.87     |   | 13.9       | 16.00  | 15.73     |   |            |        |        |
| 26.2                    | 25.08   | 24.75     |   | 27.1       | 27.93  | 27.29     |   |            |        |        |
| 44.8                    | 42.23   | 42.74     |   | 44.6       | 45.82  | 44.67     |   |            |        |        |
| 72.7                    | 70.64   | 71.39     |   | 72.4       | 73.95  | 72.35     |   |            |        |        |

Tabela 7.24 Resultados obtidos nas análises de melhoramento do conjunto modelo CPLPi

| Variável                | Excitação em f1   |           |   |            | Excitação em f2  |           |           |   |       |        |
|-------------------------|---|-----------|---|------------|--|-----------|-----------|---|-------|--------|
|                         | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final | Lim. Inf.  | Val. Ini. | Lim. Sup. | Val. final  |       |        |
| $E_x$                   | 1.72  | 1.910     | 2.10  | 1.916      | 1.56   | 1.740     | 1.91      | 1.812   |       |        |
| $E_{x1}$                | 1.52  | 1.690     | 1.86  | 1.698      | 1.48   | 1.640     | 1.80      | 1.709   |       |        |
| $E_y$                   | 1.97  | 2.190     | 2.41  | 2.200      | 1.72   | 1.910     | 2.10      | 1.989   |       |        |
| $E_{y1}$                | 1.75  | 1.940     | 2.14  | 1.951      | 1.70   | 1.890     | 2.07      | 1.961   |       |        |
| $\rho$                  | 8.28  | 10.350    | 15.52   | 10.347     | 6.37   | 7.970     | 11.95     | 7.683   |       |        |
| $\rho_1$                | 5.92  | 7.410     | 11.11   | 7.428      | 6.01   | 7.520     | 11.28     | 8.130   |       |        |
| $\rho_A$                | 0.25  | 0.500     | 0.75  | 0.493      | 1.64   | 3.280     | 4.91      | 3.286   |       |        |
| $u_{xy}$                | 3.16  | 3.510     | 3.86  | 3.508      | 3.04   | 3.380     | 3.72      | 3.246   |       |        |
| $u_{xy1}$               | 2.96  | 3.290     | 3.62  | 3.285      | 2.87   | 3.190     | 3.51      | 3.221   |       |        |
| $h$                     | 1.85  | 2.060     | 2.26  | 2.064      | 1.68   | 1.860     | 2.05      | 1.941   |       |        |
| $h_1$                   | 0.92  | 1.020     | 1.12  | 1.021      | 0.93   | 1.030     | 1.13      | 1.072   |       |        |
| $lg_1$                  | 1.98  | 19.820    | 79.29   | 19.821     | 0.58   | 5.750     | 22.99     | 5.761   |       |        |
| $lg_2$                  | 0.10  | 1.000     | 4.00  | 1.061      | 0.10   | 1.000     | 4.00      | 1.565   |       |        |
| $lg_{A1}$               | 0.27  | 2.730     | 5.46  | 2.403      | 0.21   | 2.140     | 4.28      | 2.814   |       |        |
| $lg_{A2}$               | 0.39  | 3.900     | 7.80  | 3.901      | 0.51   | 5.130     | 10.26     | 5.134   |       |        |
| $lg_{A3}$               | 0.39  | 3.940     | 7.88  | 3.934      | 0.31   | 3.050     | 6.10      | 3.069   |       |        |
| $lg_{A4}$               | 0.39  | 3.910     | 7.82  | 3.901      | 0.31   | 3.100     | 6.19      | 3.325   |       |        |
| Valor objectivo         | 2.673   |           |   |            | 2.960  |           |           |   |       |        |
| Valor objectivo (comp.) | 4.724   |           |   |            | 4.242  |           |           |   |       |        |
| Desloc. Modais finais   | -0.147  | 1.048     | -0.247  | -0.428     | -0.151   | -0.136    | 1.217     | -0.354  | 0.614 | -0.149 |
|                         | -0.466  | 0.408     | 0.429   | -0.212     | 0.266  | -0.548    | 0.504     | 0.599   | 0.268 | 0.237  |
|                         | 0.463   | -0.202    | -0.799  | -0.067     | 0.850  | 0.548     | -0.334    | -1.112  | 0.134 | 1.067  |
|                         | 4.163   | -1.127    | 0.717   | -1.842     | 2.193  | 3.813     | -1.204    | 0.649   | 1.742 | 1.999  |
|                         | -1.916  | -3.142    | 1.214   | -2.017     | 2.732  | -1.964    | -2.970    | 1.394   | 2.006 | 2.767  |
| Matriz MAC (cor)        |  |           |   |            |  |           |           |   |       |        |
|                         |   |           |   |            |  |           |           |   |       |        |
| F ref                   | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            | F ref  | F inicial | F final   | Correlação de frequências   |       |        |
| 11.1                    | 11.51   | 11.75     |  |            | 11.8   | 11.96     | 11.82     |  |       |        |
| 13.3                    | 13.12   | 13.27     |   |            | 13.4   | 14.36     | 14.75     |   |       |        |
| 26.1                    | 24.23   | 24.75     |   |            | 26.4   | 25.36     | 25.76     |   |       |        |
| 45                      | 41.43   | 42.27     |   |            | 44.9   | 43.19     | 43.11     |   |       |        |
| 72.7                    | 69.57   | 71.92     |   |            | 72.8   | 70.91     | 71.36     |   |       |        |

Na aplicação do elemento mola/amortecedor aos modelos em estudo, anulam-se os efeitos de folga (GAP), de deslizamento (Fs), da segunda constante de mola ( $K_2$ ) e do amortecedor (C). Com referência à figura 7.1, considera-se GAP nulo, Fs rígido, Fs rígido,  $K_2$  nulo e C também nulo. Considera-se ainda o deslocamento na direcção perpendicular à superfície das peças e metade da massa de cada elemento de ligação aplicada em cada nó das extremidades. Cada nó das extremidades do elemento é aplicado aos pares de nós dos quartos de arcos da representação dos furos de ligação entre as peças. Tem-se assim oito elementos aplicados em cada ligação. Considera-se também que cada uma das duas ligações tem características diferentes, associando-se uma variável a cada constante de mola e cada  $M/2$ , num total de quatro variáveis associadas a esta forma de ligação. Assim os parâmetros  $lg_{A5}$  e  $lg_{A7}$  representam respectivamente o factor de afectação das massas dos elementos de ligação esquerdo e direito entre os modelos e os parâmetros  $lg_{A8}$  e  $lg_{A9}$  representam os respectivos factores das constantes de mola. Ensaia-se os modelos de elementos finitos assim concebidos, variável a variável e verifica-se que para que essas ligações tenham sentido as constantes de mola, variáveis  $lg_{A8}$  e  $lg_{A9}$ , devem ter um valor muito elevado na ordem dos  $5 \times 10^9$  N/m. O valor das massas associadas a este elemento é o mesmo que o utilizado no elemento de viga.

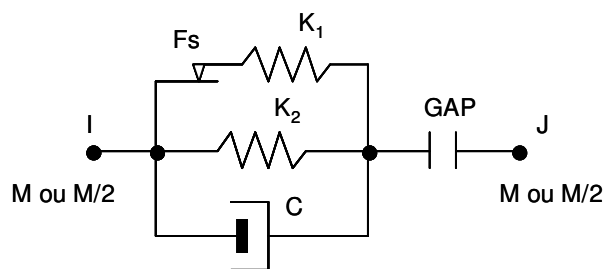
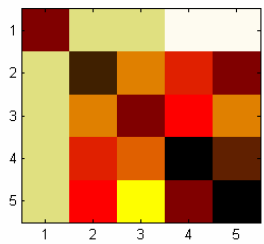
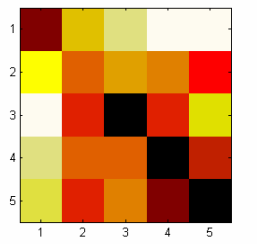
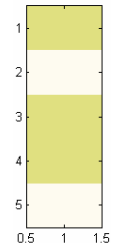



Figura 7.1 Representação geométrica do elemento de forma.

Procede-se então ao melhoramento dos modelos de elementos finitos, utilizando apenas como variáveis os quatro parâmetros associados à ligação. Os restantes parâmetros são fixados nos mesmos valores iniciais que são utilizados nos modelos estudados com ligação por viga. Na tabela 7.25 apresentam-se os resultados obtidos no melhoramento dos modelos que representam a ligação por rebite de aço e por parafuso M5. Pode-se observar que os valores da função objectivo de comparação, em ambos os casos, são piores que os obtidos utilizando os elementos de viga. Este tipo de ligação introduz um número considerável de frequências naturais cujos modos de vibração não apresentam

deslocamentos transversais à superfície das placas isto é, frequências parasitas. Aparece também um número significativo de modos de torção associados à flexibilidade das molas. Conclui-se que este tipo de ligação não é indicado para representar ligações ente peças.

Tabela 7.25 - Resultados obtidos no melhoramento do conjunto modelo CPLP excitado em f1, utilizando elementos de mola/ amortecedor

| Variável               | CPLPa   |           |   |            |        | CPLPb  |           |           |   |        |
|------------------------|---|-----------|---|------------|--------|--|-----------|-----------|---|--------|
|                        | Lim. Inf.   | Val. Ini. | Lim. Sup.   | Val. final |        | Lim. Inf.  | Val. Ini. | Lim. Sup. | Val. final  |        |
| $I_{GA5}$              | 0.50  | 5.000     | 10.00   | 3.650      |        | 0.50   | 5.000     | 55.00     | 4.232   |        |
| $I_{GA7}$              | 0.50  | 5.000     | 10.00   | 6.834      |        | 0.50   | 5.000     | 55.00     | 5.077   |        |
| $I_{GA8}$              | 0.50  | 5.000     | 10.00   | 6.833      |        | 0.50   | 5.000     | 55.00     | 36.833  |        |
| $I_{GA9}$              | 0.50  | 5.000     | 10.00   | 6.833      |        | 0.50   | 5.000     | 55.00     | 2.365   |        |
| Valor objetivo         | 4.175   |           |   |            |        | 4.039  |           |           |   |        |
| Valor objetivo (comp.) | 7.116   |           |   |            |        | 8.476  |           |           |   |        |
| Desloc. Modais finais  | -0.264  | 1.015     | -0.249  | -0.413     | -0.150 | -0.300   | 0.966     | -0.329    | -0.377  | -0.318 |
|                        | -0.453  | 0.337     | 0.417   | -0.192     | 0.239  | -0.295   | 0.184     | 0.235     | -0.120  | 0.251  |
|                        | 0.424   | -0.142    | -0.812  | -0.081     | 0.868  | 0.302  | -0.016    | -0.643    | -0.163  | 1.413  |
|                        | 4.168   | -0.743    | 0.414   | -2.106     | 1.989  | 4.284  | -0.363    | 0.463     | -2.091  | 1.669  |
|                        | -1.560  | -3.269    | 1.250   | -2.045     | 2.323  | -1.317   | -3.345    | 1.217     | -2.135  | 2.057  |
| Matriz MAC (cor)       |  |           |   |            |        |  |           |           |   |        |
|                        |   |           |   |            |        |  |           |           |   |        |
| F ref                  | F inicial   | F final   | Correlação de frequências   |            |        | F ref  | F inicial | F final   | Correlação de frequências   |        |
| 12.8                   | 11.26   | 11.27     |  |            |        | 10.5   | 10.97     | 10.98     |  |        |
| 13.3                   | 13.64   | 13.64     |   |            |        | 12.8   | 13.29     | 13.17     |   |        |
| 26.3                   | 25.03   | 25.06     |   |            |        | 26.2   | 24.42     | 24.38     |   |        |
| 44.9                   | 42.21   | 42.22     |   |            |        | 44.8   | 41.37     | 41.01     |   |        |
| 72.8                   | 70.65   | 70.68     |   |            |        | 72.7   | 69.71     | 69.87     |   |        |

## 7.6 Sumário e Discussão de Resultados

O processo de melhoramento é iniciado com o estudo individual de cada peça. Da placa PLP fazem-se dois protótipos obtendo-se dois modelos de referência PLPa e PLPb. O melhoramento do modelo de elementos finitos é melhor conseguido em relação ao modelo PLPb, obtendo-se boas correlações. No entanto os parâmetros finais obtidos no modelo que melhor se correlaciona desviam-se muito dos valores iniciais pelo que o modelo final correspondente torna-se irrealista.

O facto da função objectivo ter tendência de corrigir com maior preponderância as frequências mais elevadas, consequência da terceira parcela da equação (3.28), é compensado pela equação (2.105) representando parâmetro ASMAC que apresenta um denominador que é a soma das frequências em comparação e, portanto tem tendência contrária à da função objectivo, obtendo-se também boas correlações a baixas frequências.

Verifica-se ainda que o método de melhoramento permite identificar o emparelhamento mais adequado entre os modos de vibração obtidos nos modelos de elementos finitos e nos medidos experimentalmente. Verifica-se ainda que é satisfeita a exigência da proximidade entre os dois modelos em comparação, antes de se efectuar o progresso para reconciliar as discrepâncias iniciais entre eles. Pode-se concluir que as ferramentas desenvolvidas para esta tarefa de comparação e correlação são bastante eficientes. No entanto estes exemplos com poucos GDL podem originar inexactidões com consequências imprevisíveis.

A placa secundária, PLS é muito leve e portanto a sua resposta dinâmica é muito afectada pela massa dos sensores. Criaram-se factores de massa independentes para cada sensor, numa tentativa de representar o efeito da inércia dos cabos de ligação. No entanto, não foi possível obter semelhança suficiente entre os modelos de elementos finitos iniciais e os modelos de referência para cada tipo de modelo de ligação. A terceira frequência natural, nos modelos com excitação em  $f_1$ , apresenta, em todos os modelos, uma diferença que chega a ser de 20% para o qual não se encontra justificação. Nos resultados obtidos com a excitação em  $f_2$  esta diferença é muito menor, mas mesmo assim demasiado grande. No entanto, o facto de existir esta diferença pode reflectir com mais credibilidade o efeito da influência dos sensores e respectivos cabos nas condições dos ensaios. Esta conclusão pode ser validada em trabalhos futuros utilizando equipamento sensorial sem contacto.

Uma limitação deste método de melhoramento está no pequeno número de modos em análise. Por exemplo não só o quinto modo não foi utilizado no melhoramento do modelo de elementos finitos da placa PLS e vai ser preciso no melhoramento do conjunto final como também o primeiro modo de vibração da placa principal situa-se a uma frequência natural próximo dos 90 Hz, portanto mais elevada que a mais alta utilizada no melhoramento do modelo do conjunto, cerca de 70 Hz. Aqui, como noutras aplicações, os obstáculos principais encontrados, são a inexactidão nos dados experimentais obtidos e ainda, a utilização parcial da informação, consequência do método de melhoramento utilizado.

No melhoramento dos conjuntos seguiram-se duas vias. Primeiro tentar fazer o melhoramento de cada um, directamente a partir dos parâmetros com os valores iniciais, também utilizados no melhoramento dos modelos das peças individualmente, depois, executar as mesmas operações mas utilizando os valores finais já melhorados da análise dos modelos individuais. Os valores iniciais utilizados foram obtidos de ensaios feitos directamente ao material utilizado na fabricação dos protótipos, pelo que devem reflectir bem o comportamento das peças. Os modelos de elementos finitos obtidos com estes valores das variáveis devem estar muito próximos dos resultados obtidos experimentalmente. Aqui a melhoria dos modelos pode ser biunívoca, uma vez que os resultados obtidos nas peças reais não são garantidamente correctos. Foi este princípio utilizado na identificação modal destes protótipos. Nestas condições os modelos obtidos a partir dos parâmetros melhorados podem não ser sempre melhor conseguidos que os obtidos directamente dos parâmetros iniciais.

Tentam-se melhorar todos os modelos disponíveis, obtendo-se valores da função objectivo de comparação relativamente fracos, mas todos próximos entre si o que permite confirmar a influência nos resultados experimentais das condições de ensaio. A proximidade das duas primeiras frequências naturais também dificulta o melhoramento do modelo, uma vez que numericamente a combinação linear de modos de vibração associados a frequências muito próximas pode resultar sempre no mesmo valor, dificultando o melhoramento.

As ligações entre os modelos materializadas por vigas e por molas/amortecedores/massas revelaram-se satisfatórias, embora introduzam novas frequências naturais indesejáveis, que são ignoradas pelo sistema de melhoramento. Das

variáveis associadas ao processo de ligação por viga verifica-se que as mais influentes são a densidade e a espessura, enquanto que a constante de mola e a massa pontual foram as mais preponderantes no sistema alternativo. Este último gera mais frequências naturais parasitas, pelo que não será um processo de ligação tão recomendável como o de ligação por viga.

Nos subconjuntos PLG foi possível obter melhores resultados utilizando parâmetros iniciais já melhorados o que nos permite afirmar que neste caso os modelos melhorados permanecem consistentes e representativos dos modelos experimentais. Nos conjuntos CPLP tal não foi possível. Uma vez mais a principal justificação deve recair na falta de qualidade dos resultados experimentais, obtidos na placa secundária PLS.

Apesar de se terem feito ensaios especificamente sobre os modelos com ligação por três meios diferentes, parafuso M5, rebite de alumínio e rebite de aço, tendo os modelos de elementos finitos e experimentais sido preparados especificamente de forma a melhor representarem cada meio de ligação, os resultados globais revelam-se suficientemente imprecisos para que não permitam revelar diferenças concretas entre os modelos que tenham a ver com as ligações propriamente ditas. Este objectivo não foi atingido. Provavelmente a utilização de exemplos ainda mais simples, onde a ligação possa ser o elemento mais relevante e o aumento do número de GDL envolvido, pode conduzir a melhores resultados.

A aplicação destas metodologias de melhoramento a problemas práticos apresentam-se normalmente delicadas, principalmente devido a ser provável o surgimento de modos próximos e também a maior possibilidade de ocorrência de erros e omissões de alguns modos. É recomendável que na modelação de elementos finitos as zonas mais sensíveis sejam alvo de uma representação mais fina e as características estruturais sejam verificadas, de forma a otimizar apenas os parâmetros directamente associados com os aspectos a melhorar, cujos erros são mais prováveis de influir nos melhoramentos pretendidos.



## CAPÍTULO 8 – CONCLUSÕES

### 8.1 Conclusões

Neste trabalho abordaram-se as limitações que o método de elementos finitos ainda possui em aplicações práticas. Para isso, introduziram-se os conceitos fundamentais de dinâmica de estruturas associados à análise modal e fez-se uma abordagem sumária ao FEM. Em particular abordaram-se as funções de forma empregues nos modelos que utilizam elementos de viga, de placa e casca. O objectivo foi permitir uma mais fácil compreensão das dificuldades na construção de modelos FEM.

Apresentaram-se vários métodos de comparação de resultados entre os modelos estudados numericamente e experimentalmente, com ênfase no *MAC*, para o qual se discutiu a sua aplicabilidade e limitações. Uma vez comparados os resultados entre os modelos, é necessário correlacioná-los. Foi visto que a correlação deve ser feita tanto a nível dos modos de vibração como das frequências naturais a estes associadas. A nível dos modos de vibração, o *MAC* é um bom correlacionador, mas é omissor na avaliação da correlação em termos de frequências. Foi desenvolvido um novo modelo complementar da análise, o *ASMAC*. Este, afectando o valor do *MAC*, permite introduzir o efeito tanto do emparelhamento da frequência natural que melhor se associa a cada modo de vibração, como também na influência da qualidade do resultado da análise em função da qualidade do modelo, no que respeita ao número de GDL envolvidos. Com esta nova forma de

análise é possível identificar melhor o emparelhamento entre os modos calculados e medidos e possibilitar a automatização do procedimento. No entanto, é recomendável que, principalmente nos casos mais complexos, sejam feitas interpretações adequadas dos indicadores obtidos e sobre eles seja feita uma análise crítica. Foram salientados os principais perigos devidos à simplificação demasiada dos modelos ou das conclusões precipitadas tiradas de resultados escassos.

Foram abordados alguns métodos de obtenção do mínimo de funções não lineares contínuas quando sujeitas a constrangimentos. Os métodos mais adequados baseiam-se na obtenção dos gradientes da função objectivo para a busca do óptimo, partindo-se de um valor inicial dado. Estes métodos apresentam algumas dificuldades de aplicação, especialmente se as funções a otimizar tiverem fortes descontinuidades. Existe a possibilidade dos métodos de optimização não detectarem alguns pontos mínimos, dado que durante a análise dos incrementos a informação do declive da função pode ser colhida fora da zona de ocorrência do mínimo e consequentemente o ponto mínimo pode não ser detectado. Outra dificuldade ocorre se a função a minimizar apresentar vários mínimos. No entanto, dependendo fundamentalmente do ponto de partida, é possível que a solução encontrada pelos métodos expostos represente apenas um dos mínimos sem haver a garantia que esse valor represente o melhor mínimo. Para minimizar esse problema será necessário escolher com cuidado o ponto inicial para a primeira iteração e proceder a várias análises de confirmação partindo de diversos pontos dentro dos limites.

Foi apresentado o programa comercial de elementos finitos ANSYS, e verificada a necessidade de utilização, pelo menos parcial, da sua linguagem de comandos para permitir um melhor controlo do processo de cálculo e controlar a obtenção de resultados adequados ao modelo de elementos finitos após cada iteração. Durante o processo de optimização os parâmetros são alterados muitas vezes dentro dos limites considerados, pelo que o modelo de elementos finitos deve ter consistência de forma a permitir que essas alterações não conduzam a erros de cálculo. A escolha dos pontos onde são colhidos os modos de vibração é também uma questão importante a merecer uma atenção particular. O objectivo é determinar um modelo de elementos finitos que represente o melhor possível o modelo de referência, pelo que a escolha dos pontos de obtenção de respostas tem de ser criteriosamente considerada.

Foi apresentado o modelo matemático para a função de otimização que integra os modos de vibração e as frequências naturais da estrutura. O equilíbrio das parcelas da função através de coeficientes de ponderação foi analisado e propostos os seus valores. Foi elaborado um programa em MATLAB, para implementação do método de melhoramento do modelo numérico, recorrendo a uma função de otimização para problemas não lineares sujeita a restrições de limites. O programa desenvolvido tem por objectivo a resolução do problema de melhoramento do modelo numérico de forma automática.

Como critério de avaliação da correlação entre os modelos foram utilizados a matriz MAC, afectada pela ASMAC, para a comparação entre os modos forma e uma matriz coluna de comparação entre frequências naturais. Foram explorados os parâmetros de otimização disponibilizados por opção pelo optimizador do programa MATLAB.

O primeiro exemplo permitiu observar principalmente a evolução da optimização em termos das frequências e observou-se a influência do número de elementos na qualidade dos modos de vibração obtidos. Malhas demasiado grosseiras conduzem a modos de vibração mal configurados enquanto que malhas demasiado finas levam ao aparecimento de erros de cálculo provocados pela diminuição exagerada da dimensão dos elementos.

Foi analisado o efeito da variação das variáveis de optimização e a sua influência no resultado final. Observou-se que o coeficiente de Poisson tinha muito pouca influência, enquanto que a espessura era a mais influente no melhoramento do modelo de elementos finitos. Verificou-se que o campo de variação das variáveis tem influência no seguimento do processo de optimização, notando-se que campos de variação maiores permitem normalmente melhores soluções óptimas. Quanto aos valores iniciais das variáveis, estes também influenciam a qualidade dos resultados não se detectando nenhuma regra estabelecida para a sua influência. Não é seguro que se consiga obter o mínimo absoluto dentro do intervalo estabelecido. No entanto o objectivo deste trabalho é obter um modelo que reproduza a resposta dinâmica de outro modelo de referência e esse objectivo pode ser alcançado sem haver necessidade de se conseguir o óptimo absoluto. Basta que o valor da função objectivo seja menor que zero para se obter um modelo bem correlacionado, num máximo de  $-1$ .

Devido às diferentes dimensões das variáveis, foi necessário a sua adimensionalização. Mesmo assim a escolha dos incrementos a utilizar no processo de

otimização está limitada ao valor máximo de 0.1 Podem surgir dificuldades na escolha do melhor conjunto de valores para dar início ao processo de optimização, pelo que se propõe uma análise por intervalos de forma a tentar obter a zona do campo de variação das variáveis com melhor tendência a conduzir ao melhor mínimo.

Foram descritas as principais metodologias utilizadas na análise modal experimental e suas técnicas. A FRF tem um papel fundamental neste processo principalmente como um meio para a obtenção das características dinâmicas das estruturas. Neste contexto, como o amortecimento é difícil de determinar numericamente sendo decidido não o considerar por simplificação. Aproximam-se os modos complexos dos protótipos experimentais em modos de vibração reais. Admitiu-se que as estruturas são levemente amortecidas.

Foram abordadas as principais técnicas utilizadas na análise espectral e escolhido o melhor estimador para as aplicações envolvidas neste trabalho. Obtidas as FRF é necessário determinar os modos de vibração e as frequências naturais, processo designado por identificação modal. Foram abordadas as diferentes técnicas disponíveis, e os métodos directos e indirectos. Os métodos directos estão limitados, uma vez que avaliam directamente as matrizes características dos sistemas sem calcular os parâmetros associados. As limitações destes processos situam-se principalmente a nível da complexidade do problema e da possibilidade de conduzirem a incoerências físicas dos resultados de melhoramento modal.

Os métodos indirectos, normalmente iterativos, já permitem englobar um número significativo de GDL, apenas limitado pela técnicas experimentais. Desses destacam-se os métodos inversos como o CFR que, utilizando a inversa da função de resposta, permitem uma visualização mais rigorosa, através de rectas, dos modos que se apresentem próximos. Este último método, foi o seleccionado para utilização neste trabalho, apesar de ainda possuir algumas. Estas são consequência da determinação destes parâmetros que está dependente da visualização em monitor da mancha dos pontos obtidos na FRF, que muitas vezes se localizam com algum desalinhamento. No entanto este algoritmo permite sobrepor as várias FRFs no mesmo gráfico, dando ao método uma validade global, o que é uma vantagem importante. Pode-se concluir que, dos vários métodos de identificação, os mais simples correspondem normalmente a uma análise mais demorada, interactiva mas com

boa visibilidade e fácil interpretação física, enquanto que os mais sofisticados são mais rápidos, dando resultados mais imediatos, mas perdem muito em flexibilidade e percepção física dos seus resultados.

Foram estudados e escolhidos os modelos e formados os conjuntos das placas, permitindo a análise de vários tipos de ligadores. Optou-se por escolher como forma principal placas planas finas, por questão de simplicidade, partindo-se do princípio que estas são um bom ponto de partida para se conseguir obter resultados experimentais não afectados por efeitos secundários devido à complexidade. Algumas conclusões foram tiradas durante a descrição das metodologias utilizadas. Foram definidos modelos numéricos, procurando modelá-los com o máximo rigor em termos geométricos, no programa ANSYS, onde foram definidos os modelos desenvolvidos. Na modelação das peças foram definidos vários parâmetros como variáveis para possibilitar o processo de melhoramento dos modelos. Os resultados obtidos são sensíveis às pequenas variações geométricas provocadas pelas diferentes formas de montagem, o que representa um bom pressuposto para possibilitar o melhoramento dos seus resultados. Na modelação das peças foi considerada a afectação da massa dos diversos sensores aplicados nos modelos reais. Pode observar-se que esta massa tem uma influência significativa nos resultados, o que complica o processo de melhoramento, pois aparenta ser da mesma ordem de grandeza que a provocada pela utilização de diferentes formas de ligação entre peças. Notou-se que essa influência era menor nos modelos de maior massa, como seria de esperar, obtendo-se diferenças assinaláveis na peça mais leve. Esse problema ficaria resolvido se utilizado equipamento de medida óptico, onde as leituras podem ser feitas sem contacto físico. Apesar das diferenças encontradas as formas dos modos mantêm-se com o mesmo aspecto geral, variando apenas os deslocamentos nodais.

Nesta fase foram sobrepostas algumas curvas de receptância e comparadas as frequências naturais entre os vários protótipos, tendo-se encontrado, de uma forma geral, uma boa aproximação de resultados. Esta mesma comparação foi feita em relação aos modelos de elementos finitos, também com boa semelhança.

Utilizando o método da amplitude foi feita uma primeira análise dos resultados, tendo-se concluído que a sobreposição dos gráficos de Bode das diversas peças repetidas era bastante boa, especialmente nas baixas frequências. Uma excepção foi a placa PLS, destinada a ser utilizada na montagem com a fixação por M5, que apresentou uma

divergência assinalável em relação às restantes para a terceira frequência natural, provavelmente provocada por empenos na peça ocorridos durante as várias operações de montagem e desmontagem ocorridas durante os testes.

Foi feita a identificação modal a partir das funções de transferência obtidas experimentalmente, tendo-se obtido valores modais com alguma credibilidade. As dificuldades encontradas foram devidas tanto à pequena quantidade de resultados envolvida, poucos GDLs, como ao próprio programa pouco rigoroso na forma de abordagem aos resultados a tratar. Durante o processo de identificação, como critério de qualidade dos resultados, foi utilizada a razão de amortecimento, impondo sempre que os resultados obtidos só fossem considerados satisfatórios se a razão obtida fosse bastante baixa, da ordem dos 0.005. Comparando os resultados, nota-se com clareza a influência da massa dos sensores, elemento a considerar na fase de melhoramento dos modelos.

Devido ao pequeno número de GDL os modelos de elementos finitos não podem ser validados de forma conclusiva, permitindo apenas fazer uma comparação das propriedades dinâmicas entre os modelos numéricos e experimentais. Para isso foram propostos vários parâmetros como variáveis no processo de melhoramento. Definidos os modelos numéricos e obtidos os modelos de referência, foi feita uma comparação directa entre as suas propriedades dinâmicas e desde logo se observou alguma diferença. Verificou-se, ainda, que a validação dos modelos numéricos é difícil perante a pequena quantidade de GDL envolvida e também pela dificuldade de realizar a identificação modal dos modelos experimentais. O melhoramento destes modelos pode ainda ser possível, modificando as suas propriedades de forma a que os seus resultados fiquem melhor identificados com os do modelo de referência.

Abordaram-se uma panóplia de métodos existentes de melhoramento do modelo para possibilitar uma comparação com o método proposto neste trabalho. Algumas conclusões foram sendo tiradas, ao longo da descrição sumária de cada método. Naturalmente que é nesta fase que todos os problemas se juntam acumulando-se ainda com o facto do modelo a ser melhorado poder não possuir a configuração correcta e os dados experimentais não serem totalmente independentes entre si. Apesar do código de identificação modal conter um algoritmo que permite isolar os pontos da FRF que já tinham sido utilizados na identificação de modos contíguos, anteriormente identificados, os

resultados de identificação apresentaram, por vezes valores pouco coerentes entre si, limitando a qualidade do processo.

Dos métodos apresentados para melhoramento de modelos, muitos apresentam problemas relacionados com a subdeterminação do problema que muitas vezes são contornados por métodos de expansão dos dados modais experimentais ou por métodos de redução dos dados numéricos, ambos de garantia duvidosa. Alternativamente, existe a necessidade de ter disponível o vector próprio completo, o que é experimentalmente difícil ou seja assegurada uma correcta correspondência entre os formas do modo preditos e os de referência. Os métodos de base modal têm a desvantagem de excluïrem parte da informação que está disponível nos dados medidos originalmente, nas FRF. Relativamente aos métodos que se baseiam directamente naquela informação utilizando completamente os dados de resposta, ou que incluem antiressonancias assim como frequências ressonantes, apresentam-se como uma boa perspectiva de aplicação, principalmente nas utilizações industriais, mas dado o seu caracter mais automático são mais susceptíveis de conduzir a resultados mascarados e irrealistas. Ponderando estas razões e perante a experiência acumulada optou-se pela utilização dos métodos de base modal.

O processo de melhoramento foi iniciado com o estudo individual de cada peça. Da placa PLP fizeram-se dois protótipos pelo que se obtiveram dois modelos de referência PLPa e PLPb. O melhoramento do modelo numérico foi melhor conseguido em relação ao modelo PLPb, obtendo-se excelentes correlações. No entanto os parâmetros finais obtidos no modelo que melhor se correlacionou desviaram-se muito dos valores iniciais pelo que o modelo final correspondente tornou-se irrealista. O facto da função objectivo ter tendência de corrigir com maior preponderância as frequências mais elevadas, é compensado pela utilização do parâmetro ASMAC que apresenta um denominador que é a soma das duas frequências em comparação e, portanto tem tendência contrária à da função objectivo, obtendo-se também boas correlações a baixas frequências.

Na placa secundária, PLS encontraram-se muito mais dificuldades. Esta peça é muito leve e portanto muito afectada pela massa dos sensores. Criaram-se factores de massa independentes para cada um, numa tentativa de simular o efeito da inércia dos cabos de ligação. No entanto, não foi possível obter semelhança suficiente entre os modelos numéricos iniciais e os modelos de referência para cada tipo de modelo de ligação. A terceira frequência natural, nos modelos com excitação em  $f_1$ , apresenta em todos os

modelos uma diferença que chega a ser de 20% para o qual não se encontrou justificação. Nos resultados obtidos com a excitação em f2 esta diferença é muito menor, mas mesmo assim insuficiente. No entanto o facto de existir esta diferença pode reflectir com mais credibilidade o efeito da influência dos sensores e respectivos cabos nas condições dos ensaios. Esta conclusão irá ser validada em trabalhos futuros utilizando equipamento sensorial sem contacto. Uma limitação deste método de melhoramento está no número limitado de modos em análise. Por exemplo o quinto modo não foi utilizado no melhoramento do modelo numérico da placa PLS mas é necessário para o melhoramento do conjunto final para o qual o primeiro modo de vibração da placa principal se situa a uma frequência natural próximo dos 90 Hz, portanto mais elevada que a mais alta utilizada no melhoramento do modelo do conjunto, cerca de 70 Hz. Aqui, como noutras aplicações, os obstáculos principais encontrados, são a inexactidão nos dados experimentais obtidos e ainda, a utilização parcial da informação, consequência do método de melhoramento utilizado.

No melhoramento dos conjuntos seguiram-se duas vias. Primeiro tentar fazer o melhoramento de cada um, directamente a partir dos parâmetros com os valores iniciais, também utilizados no melhoramento dos modelos das peças individualmente, depois, executar as mesmas operações mas utilizando os valores finais já melhorados da análise dos modelos individuais. Convém referir que os valores iniciais utilizados foram obtidos de ensaios feitos directamente ao material utilizado na fabricação dos protótipos, pelo que devem reflectir bem o comportamento das peças. Os modelos numéricos obtidos com estes valores das variáveis deviam estar muito próximos dos resultados obtidos experimentalmente. Aqui a melhoria dos modelos poderia ser biunívoca, uma vez que os resultados obtidos nas peças reais não são garantidamente correctos. Foi este princípio que foi utilizado na identificação modal destes protótipos. Nestas condições os modelos obtidos a partir dos parâmetros melhorados podem não ser sempre melhor conseguidos que os obtidos directamente dos parâmetros iniciais.

Tentaram-se melhorar todos os modelos disponíveis, obtendo-se valores da função objectivo de comparação relativamente fracos, mas todos próximos entre si o que permite confirmar a influência dos resultados experimentais pelas condições de ensaio. A proximidade das duas primeiras frequências naturais dos modelos também dificulta o melhoramento do modelo, uma vez que numericamente a combinação linear de modos de



frequências muito próximas pode resultar sempre no mesmo valor dificultando o melhoramento.

As ligações entre os modelos materializadas por vigas e por molas/amortecedores/massas revelaram-se satisfatórias, embora introduzam novas frequências naturais indesejáveis, que foram sendo ignoradas pela metodologia de melhoramento. Das variáveis associadas ao processo de ligação por viga verificou-se que as mais influentes foram a densidade e a espessura, enquanto que a constante de mola e a massa pontual foram as mais preponderantes no sistema alternativo. Este último ainda gera mais frequências naturais parasitas relativamente às peças, pelo que não é um bom modelo de ligação.

Nos subconjuntos PLG foi possível obter melhores resultados utilizando parâmetros iniciais já melhorados o que nos permite afirmar que neste caso os modelos melhorados permanecem consistentes e representativos dos modelos experimentais. Para os modelos dos conjuntos CPLP tal não foi possível. Uma vez mais, a principal justificação deve recair na falta de qualidade dos resultados experimentais, obtidos na placa secundária PLS.

Apesar de se terem feito ensaios especificamente sobre os modelos com ligação por três meios diferentes, parafuso M5, rebite de alumínio e rebite de aço, tendo os modelos numéricos e experimentais sido preparados especificamente de forma a melhor representarem cada meio de ligação, os resultados globais revelaram-se suficientemente imprecisos para que não permitissem revelar diferenças concretas entre os modelos que tenham a ver com as ligações propriamente ditas. Este objectivo não foi atingido. Provavelmente a utilização de exemplos ainda mais simples, onde a ligação possa ser o elemento mais relevante e o aumento do número de GDL envolvido, poderão conduzir a melhores resultados.

## 8.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Foi elaborado um programa em MATLAB, para implementação do método de melhoramento do modelo numérico, recorrendo à função de optimização `fmincon.m`, a única do conjunto de funções disponíveis na toolbox aplicável na resolução deste problema, dado que se trata de uma função não linear sujeita a restrições de limites. O programa desenvolvido tem por objectivo a resolução do problema de melhoramento do

modelo numérico de uma forma automática e ainda não está preparado com uma interface mais acessível ao utilizador. É necessário introduzir algumas condições iniciais directamente no programa, como por exemplo o valor dos pesos, a designação do ficheiro inicial do modelo estrutural, qual o campo de variação limite dos parâmetros a variar e outras. Outro aspecto também ainda não desenvolvido tem a ver com a introdução de limitações ao funcionamento, necessárias para que um utilizador não preveja condições impossíveis ou possibilidades de execução erradas. A melhoria destas condições, assim como a possibilidade de dar sugestões de orientação de trabalho e de escolha de soluções em função das premissas do problema, assegurando sempre o correcto emparelhamento de frequência naturais e modos de vibração durante todo o processo de optimização, faz parte dos planos de desenvolvimento em trabalhos futuros. Como consequência, o desenvolvimento de modelos reduzidos de estruturas para aplicação a modelos de veículos automóveis, permitindo reduzir o tempo de simulações da dinâmica automóvel, mantendo a mesma qualidade dos resultados, constitui a meta seguinte a alcançar.

Foram estudados e escolhidos os modelos e formados os conjuntos das placas, permitindo a análise de vários tipos de ligadores. Optou-se por escolher como forma principal placas planas finas, por questão de simplicidade, partindo-se do princípio que serão um bom ponto de partida para se conseguirm obter resultados experimentais não afectados por efeitos secundários devido à complexidade, mantendo a ligação à prática, já que existem muitas possibilidades de aplicação à vida real. Algumas conclusões foram tiradas durante a descrição das metodologias utilizadas. Foram definidos modelos numéricos, procurando modelá-los com o máximo rigor em termos geométricos. Na modelação das peças foram definidos vários parâmetros como variáveis para possibilitar o processo de melhoramento dos modelos. Os resultados obtidos são sensíveis às pequenas variações geométricas provocadas pelas diferentes formas de montagem, o que representa um bom pressuposto para possibilitar o melhoramento dos seus resultados. Na modelação das peças foi considerada a afectação da massa dos diversos sensores aplicados nos modelos reais. Pode observar-se que esta massa tem uma influência significativa nos resultados, o que vai complicar o processo de melhoramento, pois aparenta ser da mesma ordem de grandeza que a provocada pela utilização de diferentes formas de ligação entre peças. Notou-se que essa influência era menor nos modelos de maior massa, como seria de esperar, obtendo-se diferenças assinaláveis na peça mais leve. Esse problema ficaria resolvido se se disponibilizasse de equipamento de medida óptico, onde as leituras

poderiam ser feitas sem contacto físico. Apesar das diferenças encontradas as formas dos modos mantêm-se com o mesmo aspecto geral, variando apenas os deslocamentos nodais.

Apesar de se terem feito ensaios especificamente sobre os modelos com ligação por três meios diferentes, parafuso M5, rebite de alumínio e rebite de aço, tendo os modelos numéricos e experimentais sido preparados especificamente de forma a melhor representarem cada meio de ligação, os resultados globais revelaram-se suficientemente imprecisos para que não permitissem revelar diferenças concretas entre os modelos que tenham a ver com as ligações propriamente ditas. Este objectivo não foi atingido. O modelo preparado para soldadura não foi analisado e a análise de diversos protótipos de geometria semelhante não apresentou respostas com suficiente uniformidade para se poder transpor os resultados para o modelo não analisado. Assim a análise da ligação por soldada fica para trabalhos futuros. No melhoramento do subconjunto PLG foram obtidos bons resultados utilizando parâmetros melhorados consistentes com a realidade física. Metodologia semelhante pode ser aplicada ao conjunto CPLP, necessitando-se para isso que as peças componentes apresentem também resultados com consistência. Esta análise é uma tarefa para trabalhos futuros. Provavelmente a utilização de exemplos ainda mais simples, onde a ligação possa ser o elemento mais relevante e o aumento do número de GDL envolvido, poderão conduzir a melhores resultados.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahmadian H., Jalali H., Mottershead J. E., Friswell M. I., (2003), Dynamic modelling of spot welds using thin layer interface theory, *Proceedings of the 10th International Congress on Sound and Vibration*, 7-10 July, Stockholm, Sweden.

Ahmadian H., Mottershead J. E., James S., Friswell M. I., Reece C. A., (2006), Modelling and updating of large surface-to-surface joints in the AWE- MACE structure, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **20**, pp. 868-880.

Allemang, R. J., Brown, D. L., (1982) A Correlation Coefficient For Modal Vector Analysis, *Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference (IMAC I)*, Orlando, Florida, U. S. A.

Ambrósio J. A. C., (1984), *Análise Dinâmica de Estruturas Complexas*, Tese de Mestrado em Engenharia do Projecto Mecânico, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Ambrósio J. A. C., Seabra Pereira M. F., Mota Soares C. A., (1985), Análise de Estruturas Complexas, *Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas (RPEE)*, **22**, pp. 29-39

*ANSYS User's Manual: Structural*, Vol. I, (1997), Swanson Analysis Systems, Inc., Berkeley, California

Arantes e Oliveira, E. R., (1965), A Utilização de Métodos Numéricos Integrais na Resolução de Problemas de Elasticidade Plana (Ph. D. thesis), Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, Portugal.

Arora, J. S., (2004), *Introduction to Optimum Design*, Second edition, Elsevier, California.

Argyris J. (1954), Energy theorems and structural analysis. Part I: general theory. *Aircraft Engineering*, **26**, pp.347-356, 383-387,394; 1955, **27**, 42-58, 80-94, 125-134, 145-158.

Babuska, I. e Rheinboldt, W.C., (1978), Error estimates for adaptive finite element computation, *SIAM .Journal of Numerical Analysis*, **15**(4), pp. 736-754.

Baruch, M., (1978), Optimization Procedure to Correct Stiffness na Flexibility Matrices Using Vibration Data, *AIAA Journal*, **16**(11), pp. 1208-1210

Baruch, M., (1982), Methods of Reference Basis for Identification of Linear Dynamic Structures, AIAA paper number 82-0769, Proceedings of the 23rd Structures, *Structural Dynamics and Materials Conference*, Part 2, New Orleans, Louisiana.

Baruch M., (1984), Methods of reference basis for identification of linear dynamic structures, *AIAA Journal*, **22**, pp. 561-564.

- Baruch, M. e Bar-Itzhack, I.Y., (1978), Optimal Weighted Orthogonalization of Measured Modes, *AIAA Journal*, **16**(4), pp. 346-351.
- Bathe, K. J., (1982), *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey.
- Becker E. Carey, G e Oden, J., (1981), *Finite Element: An Introduction Vol I*, Prentice Hall, Englewood-Cliffs, New-Jersey.
- Berman, A., (1979), Coment on Optimal Weighted Orthogonalization of Measured Modes, *AIAA Journal*, **17**(8), pp. 346-351
- Berman, A. e Nagy, E.J., (1983), Improvement of a Large Analytical Model Using Test Data, *AIAA Journal*, **21**(8), pp. 927-928.
- Braun, S, (2002), *Encyclopedia of Vibration*, Academic Press, San Diego, California.
- Brüel&Kjæl, (1986), *Piezoelectric Accelerometers and Vibration Preamplifiers Theory and Application Handbook*, Brüel&Kjæl, Glostrup, Denmark.
- Brüel&Kjæl, (1992), *Technical Documentation. Multichannel Analysis System type 3550*, Brüel&Kjæl, Nærum, Denmark
- Caesar, B., (1986), Update and Identification of Dynamic Mathematical Models, *Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference*, Los Angeles, California, pp. 394-401
- Cafeo, J. A., Trethewey, M. W., Sommer, H. J., (1992), Measurement and Application os Esperimental Rotational Degrees os Freedom for Mode Shape Refinement, *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, **7**(4), pp. 255-269
- Camanho, P. P. e Matthews, F. L., (1999), De lamination on set prediction in mechanically fastened joints in composite laminates. *J. Composit.Mate*, **33**, pp. 906-27.
- Carvalho J. B., Datta B. N., Lin W.-W., Wang C.-S., (2006), Symmetry preserving eigenvalues embedding in finite-element model updating of vibrating structures, *Journal of Sound and Vibration*, **290**, pp. 839-864.
- Chen J. C. e Garba J., (1980), Analytical model improvement using modal test results, *AIAA Journal*, **18**, pp. 684-690.
- Chen, G. e Ewins D.J., (2004), FE model verification for structural dynamics with vector projection, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **18**, pp. 739-757
- Chong, E. K. P. And Zak, S. H., (2001), *An Introduction to Optimization*, John Wiley & Sons, New York.
- Chu C.-H. e Trethewey M. W., (1998), Rapid structural design change evaluation with an experiment based FEM, *Journal of Sound and Vibratio*, **211**, pp. 335-353.
- Clough, Ray W., Penzein, J., (1975), *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Kogakusha. Lda, Tokyo, Japan.

- Clough, R. W., (1960), The finite element method in plane stress analysis. *Proceedings, Second ASCE Conference on Electronic Computation*, Sept. PA, Pittsburgh, pp. 345-378.
- Collins J. D., Hart G. C., Hasselman T. K. e Kennedy B., (1974), Statistical identification of structures, *AIAA Journal*, **12**, pp. 185-190.
- Cook, R.D. and Avrashi, J., (1992), Error estimation and adaptive meshing for vibration problems, *Computers & Structures*, **44**(3), pp. 619-626.
- Coppolino, R. N., Stroud, R. C., (1986), A global technique for estimation of modal parameters from measured data, *Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference (IMAC IV)*, Los Angeles, California, pp. 15-23
- Cottin N. e Reetz J., (2006), Accuracy of multiparameter eigenvalues used for dynamic model updating with measured natural frequencies only, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **20**, pp. 65-77.
- Courant R., (1943), Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **49**, 1943.
- Cunha H., Ambrósio J., (1997), Melhoramento de Modelos de Elementos Finitos com Aplicação à Dinâmica Estrutural de Veículos Ferroviários, Technical Report IDMEC/CPM-97/003, IDMEC, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa Portugal.
- Dantzig, G. B., (1963), *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey
- Davidon, W.C., (1959), *Variable Metric Method for Minimization*, A.E.C. Research and Development Report, ANL-5990.
- Dobson, B. J., (1987), A straight-line technique for extracting modal properties from frequency response data, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **1**(1), pp. 29-40
- Donders S., Brughmans M., Hermans L., Liefvooghe C., Van der Auweraer H., Desmet W., (2006), The robustness of dynamic vehicle performance to spot weld failures, *Finite Elements in Analysis and Design*, **42**, pp. 670-682.
- Dong P., Sun X., Lu F. e Zhang J., (1999), A Framework for Modeling Spot Welds in Finite Element Analysis of Auto-Body Structures, SAE Paper N° 1999013191, Center for Welded Structures Research at Battelle, *International Body Engineering Conference and Exposition* Detroit, Michigan, September 28-30, pp. 1-7.
- Dutta, A. and Ramakrishnan C. V: Error estimation in finite element transient dynamic analysis using modal superposition, *Engineering Computations*, (1997) Vol. **14**(1), pp.135-158
- Ekvall, J. C. (1986), Fatigue of riveted metallic joints. In *Fatigue in mechanically fastened composite and metallic joints*, ASTM STP 927, Ed. J. M. Potter, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, Pennsylvania, pp. 172-189
- Ewins, D. J., (1984), *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press Ltd.,

England.

Ewins, D. J., (2000), *Modal Testing: Theory and Practice*, Second Edition, Research Studies Press Ltd., Hertfordshire, England.

Ewins, D. J., Liu, W., (1998), Transmissibility Properties of MDOF Systems, *Proceedings of the 16<sup>th</sup> IMAC*, Santa Barbara, California, pp. 847-854.

Fang J., Hoff C., Holman B., Mueller F., Wallerstein D., (2000), Weld modelling with MSC/Nastran, *Proceedings of the Second MSC Worldwide Automotive User Conference*, Dearborn, MI. October 2000,

Farrar C., Wait J. Tippetts T., Hemez F. Park G., Sohn H., (2004), Damage detection and prediction for composite plates, *Conference on Material Science and Technology (MST)*, New Orleans, Louisiana, September, pp. 26-29.

Fletcher, R. and M.J.D. Powell, (1963), A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, *Computer Journal*, **6**, pp. 163-168

Fourment, L. and Chenot, J.L., (1995), Error estimators for viscoplastic materials: application to forming process, *Engineering Computations*, **12**(5), pp. 469-490.

Friswell, M.I., Mottershead, J.E., (1995), *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.

Friswell M.I., Mottershead J.E., Smart M.G., (1998), Dynamic models of golf clubs, *Sports Engineering*, **1**, pp. 41-50.

Fritzen C. P., (1986), Identification of mass, damping and stiffness matrices of mechanical systems, *ASME Journal of Vibration, Acoustics. Stress and Reliability in Design*, **108**, pp. 9-17.

Frost, N. E., Marsh, K. J. and Pook. L. P. (1974), *Metal Fatigue*, Clarendon Press, Oxford, pp. 375-379.

Fung, C-P. and Smart, J. (1994), An experimental and numerical analysis of riveted single lap joints. *Proc. Instn Mech. Engrs, Part G*, September, **208**, pp. 79-90.

Fung, C-P. and Smart, J. (1997), Riveted single lap joints, Part 1: a numerical parametric study. *Proc. Instn Mech. Engrs, Part G*, April, **(211)**, pp. 13-27.

Fung, C-P. and Smart, J. (1997), Riveted single lap joints, Part 2: Fatigue Life Prediction, *Proc. Instn Mech. Engrs, Part G*, April **(211)**, pp. 123-128.

Gembicki, F. W., (1994), *Vector optimisation for control with performance and parameter sensitivity indices*, Ph.D. Dissertation, Case Western Reserve Univ., Cleveland, Ohio.

Givens, W., (1954), *Numerical Computations of the Characteristic Values of a Real Symmetric Matrix*, Report No. ORNL-1574, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tenn.

Gladwell G. M. L. e Ahmadian H., (1996), Generic element matrices for finite element model



updating, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **9**, pp. 601-614.

Gurson, A. L., (1977), Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. Part 1: Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Journal Engng. Mate. Tech. ASME*, **99**, pp. 2-15.

Hashemi S. M., Richard M. J. e Dhatt G., (1999), A New Dynamic Finite Element (DFE) Formulation for Lateral Free Vibrations of Euler-Bernoulli Spinning Beams using Trigonometric Shape Functions, *Journal of Sound and Vibration*, **220**(4), pp. 601-624

He, J., (1987), *Identification of Structural Dynamics Characteristics*, PhD Thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, England.

Heywood, R. B. (1962), *Designing Against Fatigue*, Chapman and Hall Limited, London, England, pp. 230-242

Holt, M. (1950), *Results of shear fatigue tests of joints with 3/16 inch diameter 24S-T31 rivets in 0.064 inch thick Alclad sheet. NACA TN 2012*, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, February.

Horton B., Gurgenci H., Veidt M., Friswell M.I., (1999), Finite element model updating of welded joints in a tubular H-frame, *Proceedings of the 17th IMAC*, Orlando, Florida, February, pp. 1556-1562.

Howard. D. M. and Smith, F. C. (1952), *Fatigue and static tests of flush-riveted-joints*, NACA TN 2709, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, June.

Hung, C. L. and Chang, F. K. (1996) Bearing failure of bolted composite joints. part II: model and verification. *J. Composit.Ma*, **30**, pp. 1359-1400.

Ibrahim, S. R., (1983), Computation of Normal Modes from Identified Complex Modes., *AIAA Journal*, **21**(3), pp. 446-451

Ibrahim R.A. e Pettit C.L., (2005), Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners, *Journal of Sound and Vibratio*, **279**, pp. 857-936.

Imregun M. e Visser W. J., (1991), The Shock and Vibration Digest, *A review of model updating techniques*, **23**, pp. 141-162.

Imregun, M., & Visser, W.J. (1991), A review of model updating techniques, *Shock & Vibration Digest*, **23**(1), pp. 141-162.

Imregun M., Sanliturk K. Y. e Ewins D. J., (1995), Finite element model updating using frequency response function data - II: case study on a medium size finite element model,

*Mechanical Systems and Signal Processin*, **9**, pp. 203-213.

Ireman, T. (1998), Three-dimensional stresses analysis of bolted single-lap composite joints, *Composite Sruct*, **43**, pp. 195-216.

Jacobi, C. G. J., (1846), *Über ein Leichtes Verfahren die in der Theoric der Säculärstörungen*

*vorkommenden Gleichungen nurnerisch aufzulösen*, Crelle's J., Vol. 30.

Jaishi B., Ren W-X., (2007), Finite element model updating based on eigenvalue and strain energy residuals using multiobjective optimisation technique, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **21**, pp. 2295-2317

De Jong. Th. (1977) Stresses around pin-loaded boles in elastically orthotropic or isotropic plates, *J. Composit.Mater*, (**11**), pp. 313-31.

Joo, K.-j. and Wilson. E.L., (1988), An adaptive finite element technique for structural dynamic analysis, *Computers & Structures*, **30**(6), pp. 1319-1339.

Ju S.H., (1997), Stress intensity factors for cracks in bolted joints, *International Journal of Fracture*, Netherland, **84**, pp. 129-141.

Kabé, A.M., (1987), Stiffness Matrix Adjustment using Mode Data, *AIAA Journal*, **23**(9), pp. 1431-1436

Kalling P., Karlstrom A., (2002), *Statistical approach to fatigue life prediction of spot welds*, Master's Thesis, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden.

Kanev S., Weber F. M. e Verhaegen M., (2007), Experimental validation of a finite-element model updating procedure, *Journal of Sound and Vibration*.300, pp. 394-413

Kennedy, C. C., Pancu, C. D. P., (1947), Use of vectors in vibration measurement and analysis, *Journal of the Aeronautical Sciences*, **14**(11), pp.603-625

Klosterman, A., (1971), *On the experimental determination and use of modal representation of dynarnic characteristics*, Ph.D. Thesis, University of Cincinnati.

Ladeveze, P. and Leguillon, D., (1983), Error estimate procedure in the finite element method and application, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **20**(3), pp. 485-509.

Langrand B., Deletombe E., Markiewicz E. e Drazétic P., (2000), Identification of nonlinear dynamic behavior and failure for riveted joint assemblies, *Shock and Vibration*, **7**, pp. 121-138.

Lardeur P., Lacouture E., Blain E., (2000), Spot weld modelling techniques and performances of finite element models for the vibrational behaviour of automotive structures, in: P. Sas, D. Moens (Eds.). Proceedings of ISMA, vol. 25. Department of Mechanical Engineering. Katholieke Universiteit Leuven. Division PMA, Leuven, Belgeum, pp. 387-394.

Law,S. S., Chan T. H. T. and Wu D., (2001), Super-element with Semi-rigid Joints in Model Updating, *Journal of Sound and Vibratio*, **239**(1), pp.19-39

Lawrence, K. L., (2003), *ANSYS Tutorial Release 7.0*, Schroff Development Corporation Publications, USA.

Lee Y. J., Lin RJ, e Lin C. C., (1989), Buckling Analysis of Composite Laminates, *Composite Structures*, **12**, pp. 133-148.

Lee Y .J., Lin H.J. e Lin C. C., (1989), A Study on the Buckling Behavior of an Orthotropic

Square Plate with a Central Circular Hole, *Composite Structures*, **13**, pp. 173-188.

Lee Y.-J., Lin H.-J., e Lin C.-C., (2001), Study on the Post- Buckling Behavior of Laminates Connected by Rivets, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, **20**(11), pp. 902-920

Leuridan, J. M., Kundrat, J. A., (1982), Advanced matrix methods for experimental modal analysis - a multi-matrix method for direct parameter excitation, *Proceedings on the 7<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC I)*, Orlando, Florida, pp.192-200

Leuridan, J., (1984), *Some direct parameter model identification methods applicable for multiple modal analysis*, Ph.D. Dissertation, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Cincinnati.

Levin, R. I. e Lieven, N. A. J., (1998), Dynamic finite element model updating using simulated annealing and genetic algorithm, *Mechanical Systems and Signal Processing* **12**, 91-120.

Lieven, N. A J., Ewins, D. J., (1988), Spacial Correlation of Modeshapes: The Coordinate Modal Assurance Criterion (COMAC), *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC XI)*, Kissimmee, Florida, USA.

Lieven, N. A J., Waters, T. P., (1994), Error Location Using Normalised Cross Orthogonality, *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC XII)*, Honolulu, Hawaii, USA.

Lin, C.-C. and Kuo, C.-S. (1989), Buckling of Laminated Plates with Holes, *Journal of Composite Materials*, **23**, pp. 536-553.

Lin, R.M., (1991), *Identification of the Dynamic Characteristics of Non-linear Structures*, PhD Thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London.

Lin R. M. e Ewins D. J., (1990), Model updating using FRF data, *Proceedings of the 15th International Seminar on Modal Analysis*, Belgium, pp. 141-162.

Lin, R.M., Ewins, D. J., (1994), Analytical Model Improvement Using Frequency Response Functions, *Mechanical Systems and Signal Processing Journal*, **8**(4), pp. 437-458.

Lin R. M., Lim M. K. e Du H., (1995), Improved inverse eigensensitivity method for structural analytical model updating, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, **117**, pp. 192-198.

Lin,R.M., Zhu J., (2006), Model updating of damped structures using FRF data, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **20**, pp. 2200-2218

Linderholt A. e Abrahamsson T., (2003), Parameter Identifiability in Finite Element Model Error Localisation, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **17**(3), pp. 579-588

Link, M., Vollan, A., (1978), *Identification of structural system parameters from dynarnic response data*, Z Flugwiss. Weltraumforsch, **2**(3),pp.165-174

Liszka,T. and Orkisz. J., (1980), The finite difference method at arbitrary irregular grids and

its application in applied mechanics, *Computers & Structures*, **10**, pp. 83-95.

Mackerle J., (1999), Finite element analysis of machine elements. A bibliography (1977 - 1997), *Engineering Computation: Int J for Computer-Aided Engineering*, **16**(6), pp. 67-74(8)

Mackerle J., (2000), Finite element vibration and dynamic response analysis of engineering structures: a bibliography (1994-1998), *Shock and Vibration*, **7**, pp. 39-56

Maia, N. M. M., Silva, J. M. M., at all, (1998), *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research Studies Press, Hertfordshire, England, 1998

Maia, N. M. M., Ribeiro, A. M. R., Silva, J. M. M., (1994), A new concept in modal analysis: the Characteristic Response Function (CRF), *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, **9**(3), pp.191-202

Maia, N. M. M., Silva, J. M. M., Ribeiro, A. M. R., (1995), Identification of structural dynamic properties with modal constant consistency, *Proceedings of Vibration and Noise*, Venice, Italy, pp.659-667

Mares C., Mottershead J.E., Friswell M.I., (2006), Stochastic model updating: Part I-theory and simulated example, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **20**, pp. 1674-1695

Marshall I. H., Arnold W. S., Wood J. e Mousley R. F, (1989), Observations on Bolted Connections in Composite Structures, *Composite Structures*, **12**, pp. 133-151.

Martin, R. S., R., Co, e Wilkinson, J. H., (1968), Householder's Tridiagonalization of a Symmetric Matrix, *Numer. Math.*, **11**, pp.181-195

Mathews, J.H. And Fink, K. D., (1999), *Numerical Methods Using Matlab*, Third edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

MATLAB, (2002), The MathWorks, Inc., Massachusetts

Meirovitch, L., (2001), *Fundamentals of Vibrations*, McGraw Hill, Reprinted edition, New York

Minas, C. e Inmam, D.J., (1988), Correcting Finite Element Models with Measured Modal Results Using Eigenstructure Assignment Methods., *6<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*, Orlando, Florida, pp.583-587

Minas, C. e Inmam, D.J., (1990), Matching Finite Element Models to Modal Data., *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, **112**(1), pp.84-92

Moaveni, Saeed, (2003), *Finite Element Analysis Theory and Application with ANSYS*, Pearson Education International, Upper Saddle River, New Jersey.

Modak S. V., Kundra T. K. e Nakra B. C., (2000), Model updating using constrained optimization, *Mechanics Research Communications*, **27**, pp. 543-551.

Modak S., Kundra V. T. K., e Nakra B. C. (2002), Use of an updated finite element model for dynamic design, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **16**(2-3), pp. 303-322.

- Modak, S., Kundra V. T. K., e Nakra B. C., (2002), Prediction of dynamic characteristics using updated finite element models, *Journal of Sound and Vibration*, **254**(3), pp. 447-467.
- Modak, S., Kundra V. T. K., e Nakra B. C., (2005), Studies in dynamic design using updated models, *Journal of Sound and Vibration*, **281**, pp. 943-964
- Mottershead, J.E., & Friswell, M.I., (1993), Model updating in structural dynamics: a survey, *Journal Sound and Vibration*, **167**(2), pp. 347-375.
- Mottershead J.E., Mares C., Friswell M.I., (2000), Selection and updating of parameters for an aluminium space-frame model, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **14**, pp. 923-944.
- Mottershead, J. E., Friswell, M. I., Ng, G. H. T. And Brandon, J. A. (1994), Experience in Mechanical Joint Model Updating, *19<sup>th</sup> International Siminar of Modal analysis*, Leuven, September, pp. 481-492.
- Mottershead J. E., Friswell M. I., Ng G. H. T. e Brandon J. A., (1996), Geometric parameter for finite element model updating of joints and constraints, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **10**, pp. 171-182.
- Niedbal, N., (1984), Analytical Determination of Real Normal Modes from Measure Complex Responses, *25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Palm Springs, May, Paper 84-0995.
- O'Callahan, J., Avitable, P., Riemer, R., (1989), System Equivalent Reduction Expansion Process, *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC VII)*, Las Vegas, Nevada, pp.29-37
- Oldfield M., Ouyang H. e Mottershead J .E., (2005), Simplified models of bolted joints under harmonic loading, *Computers and Structures*, **84**, pp. 25-33
- Pai, N. G. e Hess, D. P., (2002), Three-dimensional finite element analysis of threaded fastener loosening due to dynamic shear load, *Engineering Failure Analysis*, **9**, pp. 383-402.
- Pai, N. G. e Hess, D. P., (2002), Experimental Study of Loosening of Threaded Fasteners due to Dynamic Shear Loads, *Journal of Sound and Vibration*, **253**(3), pp. 585-602
- Palmonella M., Friswell M.I., Mares C., Mottershead J.E., (2002), Improving spot weld models in structural dynamics, *19th Biennial ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Chicago, September
- Palmonella M., Friswell M., Mottershead J., Lees A., (2004), Guidelines for the implementation of the CWELD and ACM2 spot weld models in structural dynamics, *Finite Elements Anal. Des.*, **41**(2), pp. 193-210.
- Palmonella M., Friswell M., Mottershead J., Lees A., (2005), Finite element models of spot welds in structural dynamics: review and updating, *Comput. Struc.* **83**(8-9) pp. 648-661.
- Pan N., Sheppard S., (2002), Spot welds fatigue life prediction with cyclic strain range, *Internat. J. Fatigue*, **24**(5), pp. 519-528.

- Pascual, R., Schälchli, R., e Razeto M., (2005), Improvement of damage-assessment results using high-spatial density measurements, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **19**, pp. 123-138.
- Pavic G., (2000), Measurement of vibroacoustical properties of mechanical joints, in: P. Sas, D. Moens (Eds.), *Proceedings of ISMA*, Department of Mechanical Engineering. Katholieke Univeriteit Leuven, Division PMA, Leuven, Belgium, **25**, pp. 807-812
- Ratcliffe M. J. e Lieven N. A. J., (2000), A Generic Element - based Method for Joint Identification, *Mechanical Systems and Signal Processing* **14**(1), pp. 3-28.
- Ribeiro, A.M.R., (1998), *Response Prediction to Distributed Loads Using Transmissibility* International modal analysis conference 18, San Antonio TX, **4062**(2), pp. 425-427
- Ribeiro, A.M.R., (1998), On the Generalisation of the Transmissibility Concept, Proc. of the NATO-ASI, *Modal Analysis & Testing*, Sesimbra, Portugal, pp. 757-764.
- Ribeiro, A.M.R., (1999), Experimental Evaluation of the Transmissibility Matrix, *Proc. of the 17<sup>th</sup> IMAC*, Orlando, Florida, USA, pp. 1126-1129.
- Ribeiro, A.M.R., (1999), *Desenvolvimento de Técnicas de Análise Dinâmica Aplicáveis à Modificação Estrutural*, Ph. D. Thesis, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Ribeiro, A.M.R., (1998), On the Generalisation of the Transmissibility Concept Proc. of the NATO-ASI, *Modal Analysis & Testing*, Sesimbra, Portugal, pp. 757-764.
- Ribeiro, A.M.R., (1999), Experimental Evaluation of the Transmissibility Matrix, *Proc. of the 17<sup>th</sup> IMAC*, Orlando, Florida, USA, pp. 1126-1129
- Rich, D. L. and Impellizzeri, L. F. (1977), Fatigue analysis of cold-worked and interference fit fastener holes. In *Cyclic stress-strain and plastic deformation aspects of fatigue crack growth*, ASTM STP 637, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, Pennsylvania, pp. 153-175.
- Rosen, J. B., (1960), The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Part I: Linear Constraints, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **8**(1), pp. 181-217
- Schittkowski, K., (1985), NLQPL: A FORTRAN-Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems, *Annals of Operations Research*, **5**, pp. 485-500
- Shin S. e Cho B., (2005), Bias-specified robust design optimization and its analytical solutions, *Computers & Industrial Engineering*, **48**, pp. 129-140.
- Silva, J. M. M., (1998), An Overview of the Fundamentals of Modal Analysis Proc. of the NATO-ASI, *Modal Analysis & Testing*, Sesimbra, Portugal, pp. 1-34.
- Sinha, J. K., Friswell, M. I., (2003), The use of model updating for reliable finite element modelling and fault diagnosis of structural components used in nuclear plants, *Nucl. Eng. Des.*, **223**, pp. 11-23.
- Sinha J., Rama Rao, K. A., Sinha, R.K., (2006), Realistic seismic qualification using the

updated finite element model for in-core components of reactors, *Nuclear Engineering and Design*, **236**, pp. 232-237.

Smith, S. W. e Beattie, C. A., (1991), Secant-Method Adjustment for Structural Models., *AIAA Journal*, **29**(1), pp. 119-126

Song Y., Hartwigsen C.J., McFarland D.M., Vakakis A.F., L.A. Bergman, (2004), Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted Iwan beam elements, *Journal of Sound and Vibration*, **273**(1-2), pp. 249-276.

Steenackers G., Guillaume P., (2006), Finite element model updating taking into account the uncertainty on the modal parameters estimates, *Journal of Sound and Vibration*, **296**, pp. 919-934.

Swenson, D. V., Chia, C. C. e Derber, T. G. (1992), Analytical and experimental investigation of fatigue in lap joints. In *Advances in fatigue lifetime predictive techniques*, ASTM STP 1122,

Terrell, M.J., Friswell, M.I., Lieven, N.A.J., (2007), Constrained generic substructure transformations in finite element model updating, *Journal of Sound and Vibration*, **300**, pp. 265-279

Timoshenko, S., Young, D. H. And Weaver, W. Jr., (1974), *Vibration Problems in Engineering*, Fourth Edition, John Wiley & Sons, New York.

Titurus B., Friswell M.I., Starek L., (2003) Damage detection using generic elements: part I model updating, *Computers and Structures*, **81**, pp. 2273-2286.

Tserpes K. I., Papanikos P. e Kermanidis Th., (2001), A three-dimensional progressive damage model for bolted joints in composite laminates subjected to tensile loading, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, **24**, pp. 663-675

Varoto, P.S., McConell, K. G., (1998), *Single Point vs Multi Point Acceleration Transmissibility Concepts in Vibration Testing*, IMAC : International modal analysis conference 16, Santa Barbara CA , ETATS-UNIS (02/02/1998), **3243**(1), pp. 83-90

Venkataraman, P., (2002), *Applied Optimization with Matlab Programming*, John Wiley, Inc., New York.

Verboven, P., e outros., (2005), Improved Modal Parameter Estimation for Lowly Damped Systems Using Non-parametric Exponential Windowing Techniques, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **19**, pp.675-699

Wang S., e Han Y., (1988), Finite Element Analysis for Load Distribution of Multi-Fastener Joints, *Journal of Composite Materials*, **22**, pp. 124-135.

Wang Y. e Lim T. C., (2001), An Experimental and Computational Study: of the Dynamic Characteristics of Spot-Welded Sheet Metal Structures, SAE 2001, SAE Paper N° 200101431, *World Congress*, Detroit, The University of Alabama, Michigan March 5-8, pp. 1-9.

Weaver, Jr., W., Johnston, P. R., (1987), *Structural Dynamics by Finite Elements*, Prentice-

Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Weaver, W., Jr., e Gere, J. M., (1980), *Matrix Analysis of Framed Structures*, 2nd ed., Van Nostrand Reinhold, New York.

Weaver, W., Jr., e Johnston, P. R., (1984), *Finite Elements for Structural Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey

Wei, F-S., (1989), Structural Dynamic Model Modification Using Vibration Test Data., 7<sup>th</sup> *International Modal Analysis Conference (IMAC VII)* Las Vegas, Nevada, pp. 562-567

Wei, F-S., (1990a), Structural Dynamic Model Improvement Using Vibration Test Data, *AIAA Journal*, **28**(1), pp. 175-177

Wei, F-S., (1990b), Mass and Stiffness Interaction Effects in Analytical Model Modification., *AIAA Journal*, **28**(9), pp. 1686-1688

Wilson, E. L., Itoh, T., (1983), An Eigensolution Strategy for Large Systems, *Computers and Structures*, **16**(11), pp. 259-265

Wong, C. M. S. e Matthews, F. L. (1981), A finite element analysis of single and two-hole bolted joints in fibre reinforced plastic. *J. Composit.Mater*, **16**, pp. 481-91.

Wu D. e Law S.S., (2004), Model error correction from truncated modal flexibility sensitivity and generic parameters: part I-simulation, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **18**, pp. 1381-1399.

Wu D. e Law S.S., (2004), Model error correction from truncated modal flexibility sensitivity and generic parameters: part II-experimental verification, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **18**, pp. 1401-1419.

Wu J.R. e Li Q.S., (2006), Structural parameter identification and damage detection for a steel structure using a two-stage finite element model updating method, *Journal of Constructional Steel Research*, **62**, pp. 231-239.

Wung P., (2001), A Method for Spot Welded Structure Analysis, AEC MD44 Ford Motor Company, SAE Paper N° 200101427, *SAE 2001 World Congress*, Detroit, Michigan, March 5-8, pp. 1-10

Xu S., Deng X., (2004), An evaluation of simplified finite element models for spot-welded joint, *Finite Elements Anal. Des*, **40**(10), pp. 1175-1194.

Zang C., Friswell M., Mottershead J., (2005), A review of robust optimal design and its application in dynamics, *Computers and Structures*, **83**, pp. 315-326.

Zeng, L.F. and Wiberg. N.-E., (1992), Spatial mesh adaptation in semidiscrete finite element analysis of linear elastodynamic problems, *Computational Mechanics*, **9**, pp. 315-332.

Zeng. L.F., Wiberg, N.-E., Li, X.D. e Xie. Y.M., (1992), A posteriori local error estimation and adaptive time-stepping for Newmark Integration in dynamic analysis, *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, **21**, pp. 555-571.



- Zhang, S., (1997), Stress Intensities at Spot Welds, *International Journal of Fracture*, **88**, pp 167-185.
- Zhang S., (2001), Recent Developments in Analysis and Testing of Spot Welds, Research and Technology, DaimlerChrysler AG, SAE Paper N° 200101432, *SAE 2001 World Congress*, Detroit, Michigan, March 5-8, pp. 1-14.
- Zhang Y. e D. Taylor, (2001), Optimisation of spot-welded structures, *Finite Elements in Analysis and Design*, **37**, pp. 1013-1022.
- Zienkiewicz O. C., (1977), *The Finite Element Method*, third Edition, McGraw-Hill, London, England.
- Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., (1967), *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, London, England.
- Zienkiewicz, O.C., De, J.P., Gago, S.R. and Kelly, D.W., (1983), The hierarchical concept in finite element analysis, *Computers & Structures*, **16**(1-4), pp. 53-65.
- Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., (1987), A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**, pp. 337-357.
- Zienkiewicz, O.C. and Xie, Y.M., (1991), A simple error estimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis, *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, **20**, pp. 871-887.
- Zimmerman, D. C. e Widengren, M., (1990), Correcting Finite Element Models Using a Symmetric Eigenstructure Assignment Technique., *AIAA Journal*, **28**(9), pp. 1670-1676
- Zimmerman D. C., Yap K. e Hasselman T., (1999), Evolutionary approach for model refinement, *Mechanical Systems and Signal Processin*, **13**, pp. 609-625.
- Zivanovic, S., Pavic, A., Reynolds, P., (2007), Finite element modelling and updating of a lively footbridge: The complete process, *Journal of Sound and Vibration*, **301**, pp.126-145



## PUBLICAÇÕES

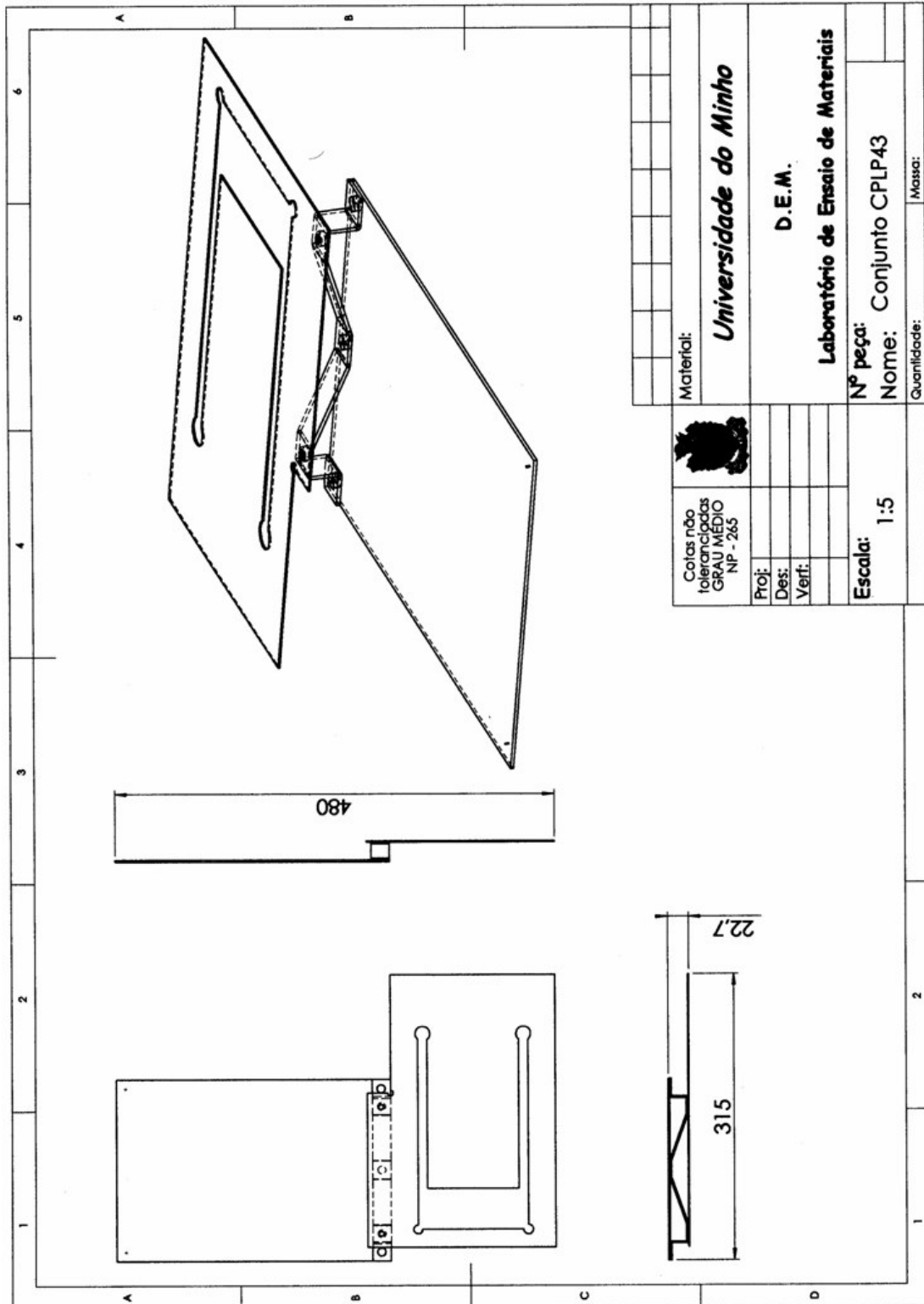
**Meireles J.**, Ambrósio, J., Montalvão e Silva J. e Pinho, A.C.M. (2007) – Dinâmica de Estruturas por Modelos de Elementos Finitos Identificados Experimentalmente, *Actas do 8º Congresso Iberoamericano de Engenharia Mecânica*, Cusco, Peru, Outubro 2007, pp.1-10, in CD.

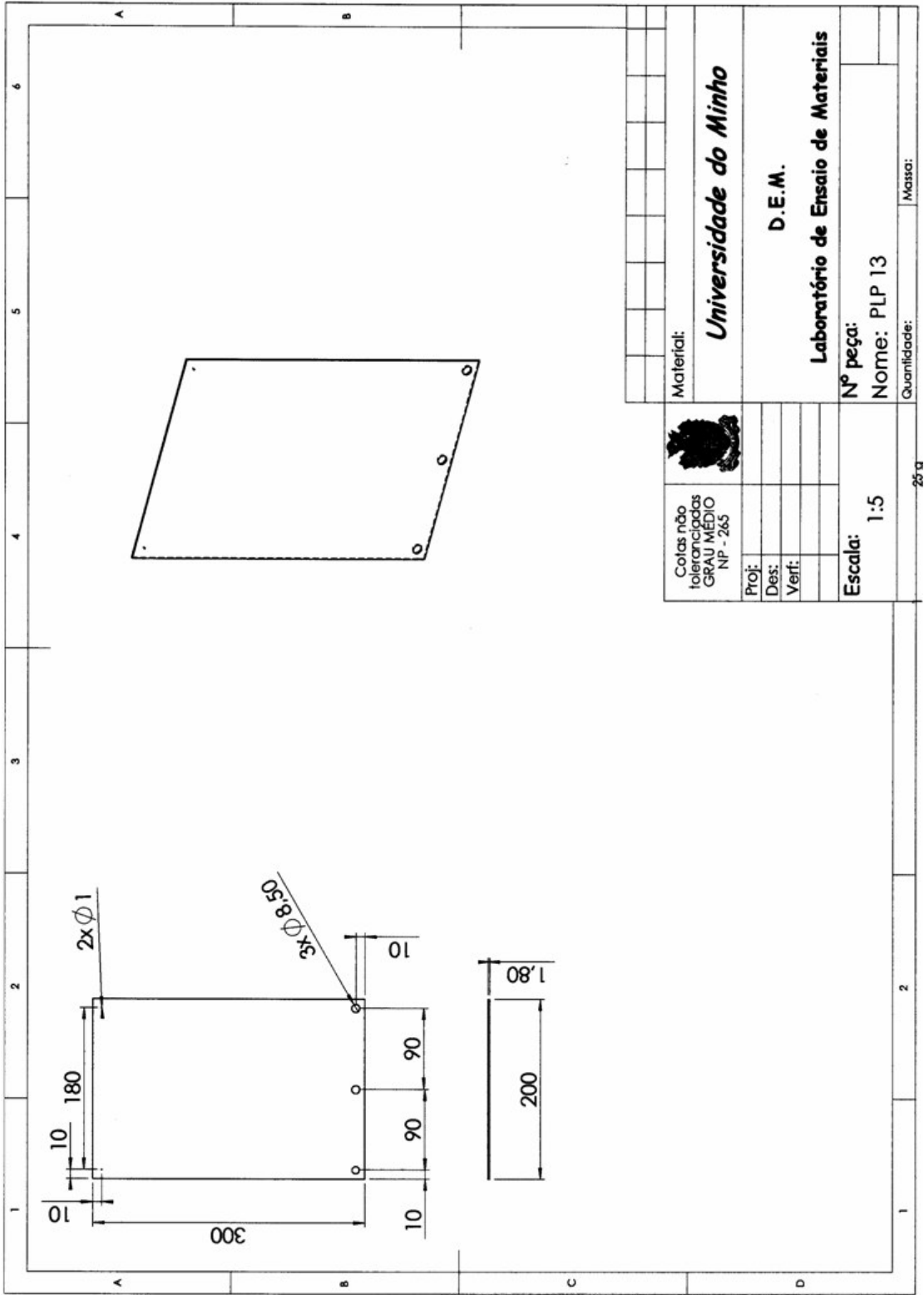
**Meireles J.**, Ambrósio, J., Montalvão e Silva J. e Pinho, A.C.M. (2007) - Structural Dynamic Analysis by Finite Element Models Experimentally Identified: an Approach Using Modal Data, *Proceedings of Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures EVACES'07 Conference*, FEUP, Porto, October 2007, pp.791-800, in CD.

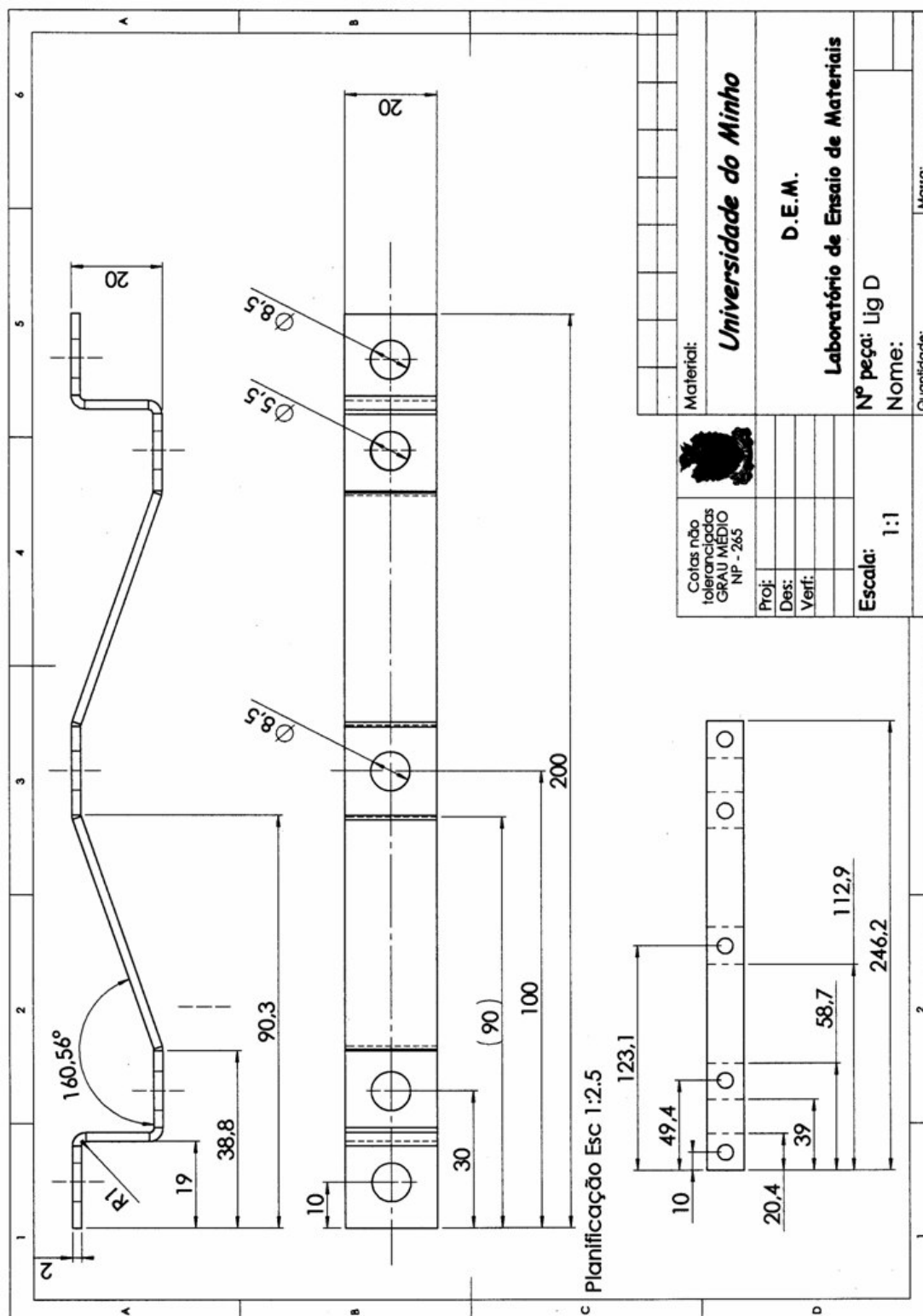
**Meireles J.**, Ambrósio, J., Montalvão e Silva J. e Pinho, A.C.M. (2007) - Aplicações do Método dos Elementos Finitos a ligações na Dinâmica de Estruturas, *Actas da Conferência Nacional de Dinâmica de Sistemas Multicorpo DSM2007*, Escola de Engenharia da Universidade do Minho, Guimarães, 6-7 Dezembro 2007, pp. 137-143.



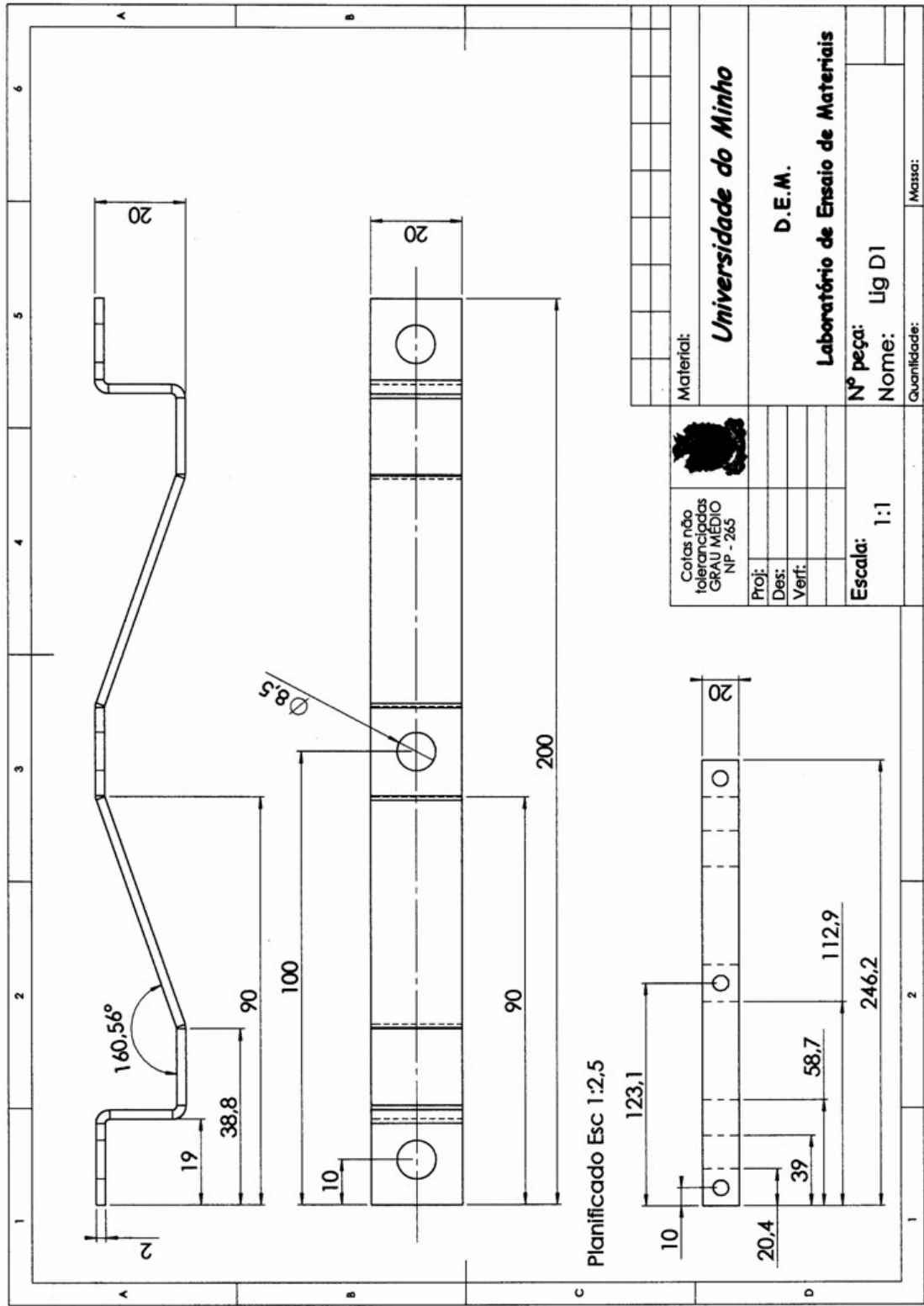
## **APENDICE I – DESENHOS TÉCNICOS DOS PROTÓTIPOS ESTRUTURAIS**

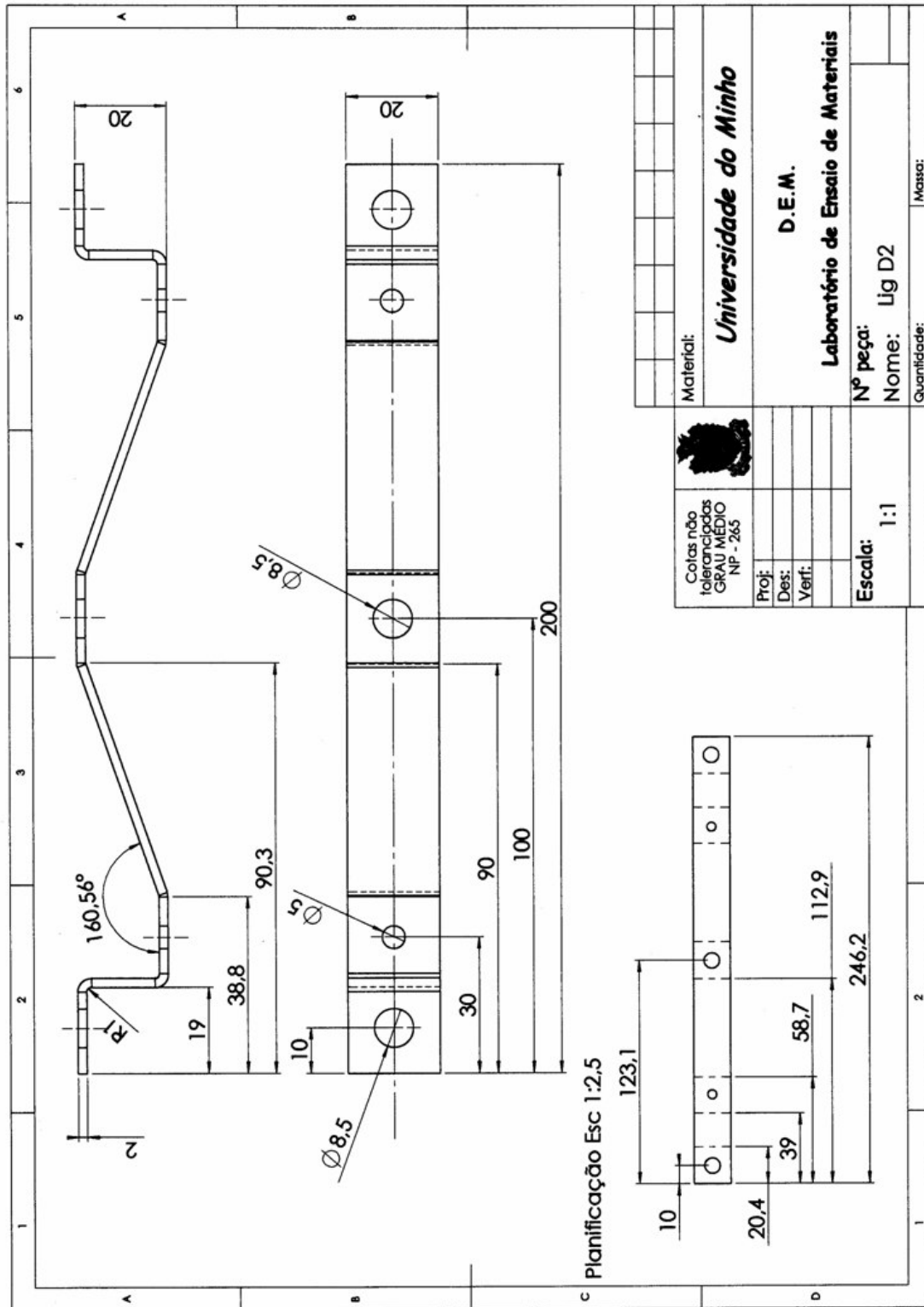


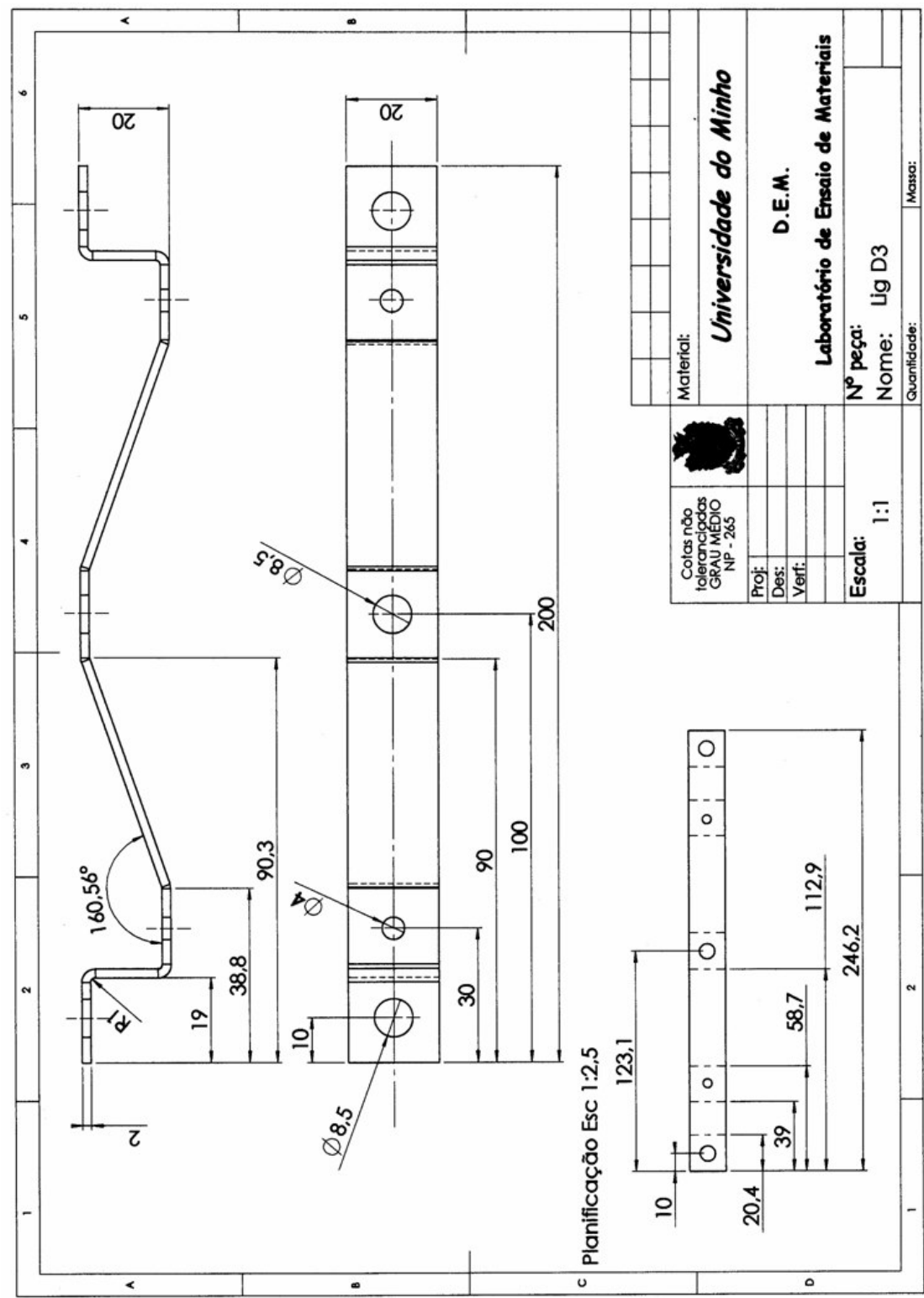


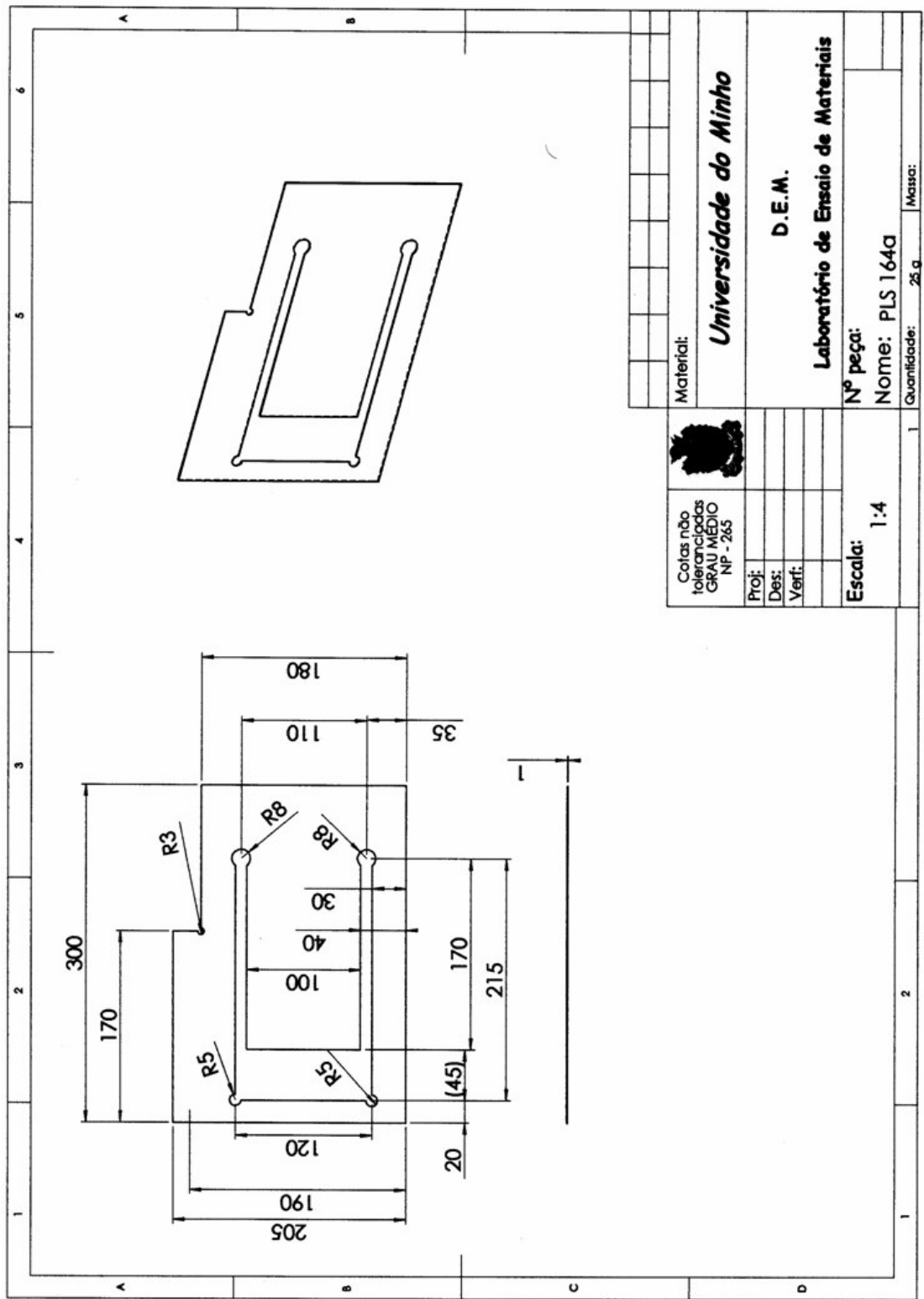


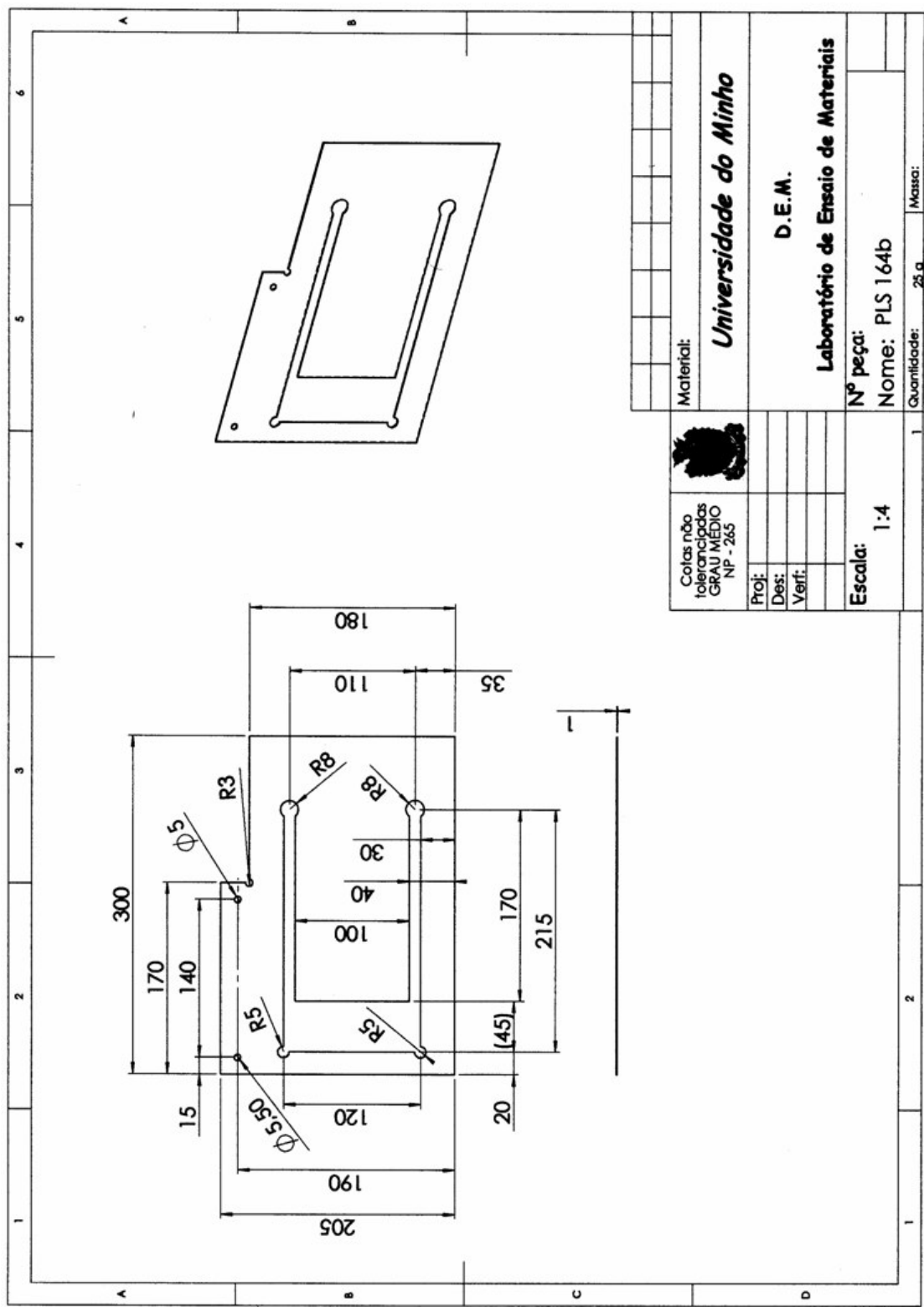






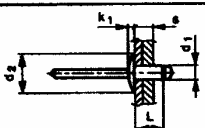





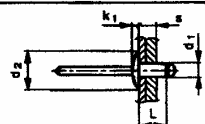
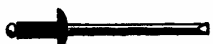







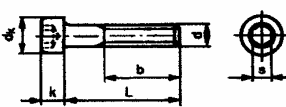

Rebite de Aço

|  |      |        |  |  |
|--|------|--------|--|--|
| FABORY - BLIND RIVETS - [REDACTED] ZINC PLATED WITH STEEL ZINC PLATED MANDREL                  |      |        |  |  |
| FABORY - BLINDKLINGNAGELS - STAAL ELEKTROLYTISCH VERZINKT MET STALEN ELVZ STIFT                |      |        |  |  |
| FABORY - RIVETS AVEUGLES - ACIER ZINGUE AVEC TIGE ACIER ZINGUE                                 |      |        |  |  |
| FABORY - REMACHES CIEGOS - ACERO GALVANIZADO ELECTROLITICO CON MANGO ACERO GALVANIZADO ELECTR. |      |        |  |  |
| FABORY - BLINDNIETE - STAHL VERZINKT MIT STAHEM VERZINKTEM NIETSTIFT                           |      |        |  |  |
|               | ISO  | :-     | <b>CODE</b><br><br>ZINC PL. [REDACTED] | <br><i>Ordering example:</i><br>34130 3,0 x 5,0 |
|  | DIN  | : 7337 |  |  |
|  | NEN  | :-     |  |  |
|  | ANSI | :-     |  |  |
|  | BS   | :-     |  |  |
|  | NF   | :-     |  |  |
| d1   | 3,0  | 4,0    | 5,0                                    |  |
| d2   | 6,5  | 8,0    | 9,5                                    |  |
| k1   | 0,8  | 1,0    | 1,1                                    |  |
| Drill ø  | 3,1  | 4,1    | 5,1                                    |  |
| Max. allowable tensile force in N  | 1720 | 3040   | 4900                                   |  |
| Max. allowable shear load in N   | 2450 | 4120   | 7600                                   |  |

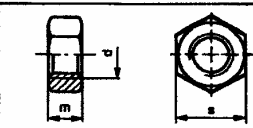

Rebite de Alumínio

|   |   |        |   |   |
|---|---|--------|---|---|
| FABORY - BLIND RIVETS - [REDACTED] WITH STEEL ZINC PLATED MANDREL                   |   |        |   |   |
| FABORY - BLINDKLINKNAGELS - ALUMINIUM MET STALEN ELEKTROLYTISCH VERZINKTE STIFT     |   |        |   |   |
| FABORY - RIVETS AVEUGLES - ALUMINIUM AVEC TIGE ACIER ZINGUE                         |   |        |   |   |
| FABORY - REMACHES CIEGOS - ALUMINIO CON MANGO ACERO GALVANIZADO ELECTROLITICO       |   |        |   |   |
| FABORY - BLINDNIETE - ALUMINIUM MIT STAHEM VERZINKTEM NIETSTIFT                     |   |        |   |   |
|  | ISO   | : -    | CODE  |  |
|   | DIN   | : 7337 |   |   |
|   | NEN   | : -    |   |   |
|   | ANSI  | : -    |   |   |
|   | BS  | : -    |   |   |
|   | NF  | : -    |   |   |
|   | AI  |        |   |   |
|   |   |        |  34210 |   |
|   |   |        |  34210 |   |
|   |   |        |   | Ordering example:<br>34210 2,4 x 4,0  |
| d1  |  | 5,0    | 6,0   |   |
| d2  |   | 9,5    | 12,0 ø  |   |
| k1  |   | 1,1    | 1,5   |   |
| Drill ø   |   | 5,1    | 6,1   |   |
| Max. allowable tensile force in N   | L ≤ 30  | L > 30 | 3480  |   |
|   | 3140  | 2430   |   |   |
| Max. allowable shear load in N  | 1960  | 1770   | 4320  |   |

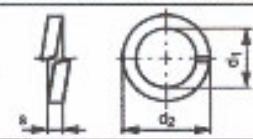

## Parafuso de Cabeça Sextavada Interior

| <b>HEXAGON SOCKET HEAD CAP SCREWS - STEEL</b><br><b>CILINDERSCHROEVEN MET BINNENZESKANT - STAAL</b><br><b>VIS A TÊTE CYLINDRIQUE A SIX PANS CREUX - ACIER</b><br><b>TORNILLOS DE CABEZA CILINDRICA CON HUECO HEXAGONAL - ACERO</b><br><b>ZYLINDERSCHRAUBEN MIT INNENSECHSKANT - STAHL</b> |      |  |      |                                       |     |   |    |      |   |
|---|------|--|------|---------------------------------------|-----|---|----|------|---|
|    |      | ISO : 4762<br>DIN : 912<br>NEN : 1241<br>ANSI : B18.3.1M<br>BS : -<br>NF : - |      | <b>CODE</b><br><br><b>STEEL</b> 07000 |     | <br>Ordering example:<br>07000 M12 x 20 |    |      |   |
| <b>d</b>  | M1,6 | M2   | M2,5 | M3                                    | M4  | M5  | M6 | M8   | → |
| <b>P</b>  | 0,35 | 0,4  | 0,45 | 0,5                                   | 0,7 | 0,8   | 1  | 1,25 |   |
| <b>b</b>  | 15   | 16   | 17   | 18                                    | 20  | 22  | 24 | 28   |   |
| <b>dk (max.)</b>  | 3    | 3,8  | 4,5  | 5,5                                   | 7   | 8,5   | 10 | 13   |   |
| <b>k (max.)</b>   | 1,6  | 2  | 2,5  | 3                                     | 4   | 5   | 6  | 8    |   |
| <b>s</b>  | 1,5  | 1,5  | 2    | 2,5                                   | 3   | 4   | 5  | 6    |   |

## Porca

| <b>HEXAGON NUTS - STEEL AND STEEL ZINC PLATED</b><br><b>ZESKANTMOEREN - STAAL EN STAAL ELEKTROLYTISCH VERZINKT</b><br><b>ECROUS HEXAGONAUX - ACIER ET ACIER ZINGUE</b><br><b>TUERCAS HEXAGONALES - ACERO Y ACERO GALVANIZADO ELECTROLITICO</b><br><b>SECHSKANTMUTTERN - STAHL UND STAHL VERZINKT</b> |     |  |     |   |     |   |     |      |     |     |     |
|--|-----|--|-----|---|-----|---|-----|------|-----|-----|-----|
|    |     | ISO : -<br>DIN : 934<br>NEN : 1560<br>ANSI : -<br>BS : -<br>NF : - |     | <b>CODE</b><br><br><b>STEEL</b> ☒ 01100<br><b>STEEL</b> ☒ ☒ 01100<br><b>ZINC PL.</b> ☒ ☒ 01300<br><b>ZINC PL.</b> ☒ ☒ 01310 |     | <br>Ordering example:<br>01100 M3 |     |      |     |     |     |
| <b>d</b>   | M3  | M4   | M5  | M6  | M7  | M8  | M10 | M12  | M14 | M16 | M18 |
| <b>P</b>   | 0,5 | 0,7  | 0,8 | 1   | 1   | 1,25  | 1,5 | 1,75 | 2   | 2   | 2,5 |
| <b>m</b>   | 2,4 | 3,2  | 4   | 5   | 5,5 | 6,5   | 8   | 10   | 11  | 13  | 15  |
| <b>s</b>   | 5,5 | 7  | 8   | 10  | 11  | 13  | 17  | 19   | 22  | 24  | 27  |

## Anilha de Pressão

| <b>SPRING LOCK WASHERS WITH SQUARE ENDS - STEEL AND STEEL ZINC PLATED</b><br><b>VEERRINGEN MET VLAKE EINDEN - STAAL EN STAAL ELEKTROLYTISCH VERZINKT</b><br><b>RONDELLES ELASTIQUES SANS BECS - ACIER ET ACIER ZINGUE</b><br><b>ARANDELAS HELICOIDAL DE PRESION - ACERO Y ACERO GALVANIZADO ELECTROLITICO</b><br><b>FEDERRINGE GLATT MIT RECHTECKIGEM QUERSCHNITT - STAHL UND STAHL VERZINKT</b> |     |  |      |   |      |  |     |      |      |      |      |      |      |
|--|-----|--|------|---|------|--|-----|------|------|------|------|------|------|
|   |     | ISO : -<br>DIN : 127 B<br>NEN : 1197 B<br>ANSI : -<br>BS : -<br>NF : - |      | <b>CODE</b><br><br><b>STEEL</b> ☒ 37000<br><b>STEEL</b> ☒ ☒ 37010<br><b>ZINC PL.</b> ☒ ☒ 37020<br><b>ZINC PL.</b> ☒ ☒ 37030 |      | <br>Ordering example:<br>37000 M3 |     |      |      |      |      |      |      |
| For nom. size  | M2  | M2,3   | M2,5 | M3  | M3,5 | M4   | M5  | M6   | -    | M7   | M8   | -    | M10  |
| <b>d1 (min.)</b>   | 2,1 | 2,4  | 2,7  | 3   | 3,6  | 4,1  | 5,1 | 6,1  | 8,4  | 7,1  | 8,1  | 9,7  | 10,2 |
| <b>d2 (max.)</b>   | 4,4 | 4,8  | 5,2  | 6,2   | 6,7  | 7,6  | 9,2 | 11,8 | 12,1 | 12,8 | 14,8 | 17,6 | 18,1 |
| <b>s</b>   | 0,5 | 0,6  | 0,6  | 0,8   | 0,8  | 0,9  | 1,2 | 1,6  | 1,8  | 1,6  | 2    | 2,2  | 2,2  |



## APENDICE II –CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E MECÂNICAS DOS PROTÓTIPOS

Os protótipos definidos no Apêndice I são executados em chapa de aço sendo a sua massa e inércia avaliadas experimentalmente. Na tabela AII.1 apresentam-se os valores obtidos.

Tabela AII.1 - Massa dos principais componentes dos protótipos estruturais

| PEÇAS  | PESO (g) | Média (g) |
|--|----------|-----------|
| Parafuso M8 cabeça sextavada interior com anilha e porca | 17.7     | 17.62     |
| Parafuso M8 cabeça sextavada interior com anilha e porca | 17.6     |           |
| Parafuso M8 cabeça sextavada interior com anilha e porca | 17.6     |           |
| Parafuso M8 cabeça sextavada interior com anilha e porca | 17.4     |           |
| Parafuso M8 cabeça sextavada interior com anilha e porca | 17.8     |           |
| Rebite Al diam. 5 mm aplicado                            | 0.85     |           |
| Parafuso M5 cabeça sextavada interior com anilha e porca | 4.4      | 4.25      |
| Parafuso M5 cabeça sextavada interior com anilha e porca | 4.3      |           |
| Parafuso M5 cabeça sextavada interior com anilha e porca | 4.2      |           |
| Parafuso M5 cabeça sextavada interior com anilha e porca | 4.2      |           |
| Parafuso M5 cabeça sextavada interior com anilha e porca | 4.2      |           |
| Parafuso M5 cabeça sextavada interior com anilha e porca | 4.2      |           |
| Placa Principal PLP13 (PLP13b)                           | 851.9    |           |
| Placa Principal PLP13 com furo central puchado (PLP13a)  | 856.7    |           |
| Ligador LIG  | 64.4     | 62.58     |
| Ligador LIG  | 61.4     |           |
| Ligador LIG  | 62.4     |           |
| Ligador LIG  | 62.4     |           |
| Placa Secundária PLS164                                  | 385.8    |           |
| Conjunto PLS + LIG + Rebites de aço                      | 449.4    |           |
| Conjunto PLS + LIG + Rebites de Al                       | 451.6    |           |
| Conjunto PLS + LIG + Parafusos M8                        | 484.3    |           |
| Conjunto PLS + LIG + Soldadura por pontos                | 451.2    |           |
| Conjunto PLS + LIG + Soldadura MIG                       | 450.1    |           |
| Conjunto PLS + LIG + Parafusos M5                        | 457.3    |           |

Para a aquisição da massa das peças utiliza-se uma balança digital de sensibilidade de décimo de grama e capacidade de 4000 gramas. As peças são também verificadas dimensionalmente, para apreciação dos desvios em relação aos valores projectados nos desenhos. Esta verificação destina-se a obter valores dimensionais médios para utilização na modelação das peças por elementos finitos.

Nos protótipos da placa PLP13 foram medidas as dimensões dos 4 lados designados A, B, C e D e ainda a espessura em 6 pontos a, b, c, d, e e f, como se ilustra na figura AII.1. Os valores obtidos apresentam-se na tabela AII.2. Na mesma tabela para cada valor medido é apresentado na coluna seguinte a percentagem de variação encontrada em relação ao valor projectado no desenho de fabricação dos protótipos.

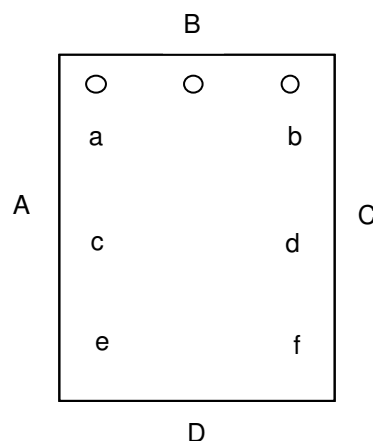


Figura AII.1 - Representação esquemática da placa PLP13

Tabela AII.2 - Medidas obtidas na placa PLP13

| Cota | Designação | No desenho | Placa PLP13b | Var % | Placa PLP13a | Var % | Equipamento usado |
|------|------------|------------|--------------|-------|--------------|-------|-------------------|
| A    | Lado       | 300        | 300.5        | +0.17 | 300.5        | +0.17 | Fita métrica      |
| B    | »          | 200        | 201          | +0.5  | 201          | +0.5  | Fita métrica      |
| C    | »          | 300        | 301          | +0.33 | 301          | +0.33 | Fita métrica      |
| D    | »          | 200        | 201          | +0.5  | 201          | +0.5  | Fita métrica      |
| a    | Espessura  | 1.8        | 1.83         | +1.67 | 1.815        | +0.83 | Micrómetro        |
| b    | »          | 1.8        | 1.82         | +1.11 | 1.815        | +0.83 | Micrómetro        |
| c    | »          | 1.8        | 1.82         | +1.11 | 1.82         | +1.11 | Micrómetro        |
| d    | »          | 1.8        | 1.81         | +0.56 | 1.82         | +1.11 | Micrómetro        |
| e    | »          | 1.8        | 1.82         | +1.11 | 1.825        | +1.39 | Micrómetro        |
| f    | »          | 1.8        | 1.81         | +0.56 | 1.825        | +1.39 | Micrómetro        |

Nas placas secundárias montadas com os ligadores LIG procede-se de forma idêntica, obtendo-se as dimensões nos locais indicadas na figura AII.2 cujos resultados são apresentados na tabela AII.3. Na elaboração da tabela AII.3 consideraram-se as seguintes designações:

A peça 1 é o Conjunto PLS + LIG + Parafusos M5

A peça 2 é o Conjunto PLS + LIG + Parafusos M8

A peça 3 é o Conjunto PLS + LIG + Rebites de Al

A peça 4 é o Conjunto PLS + LIG + Rebites de aço

A peça 5 é o Conjunto PLS + LIG + Soldadura por pontos

A peça 6 é o Conjunto PLS + LIG + Soldadura MIG

A peça 7 é a Placa Secundária PLS164 referência "PLS164a"

As cotas designadas por letras minúsculas representam dimensões medidas com precisão de  $\pm 0.1$  mm enquanto que as cotas designadas por letras maiúsculas representando espessuras são medidas com precisão de  $\pm 0.01$  mm.

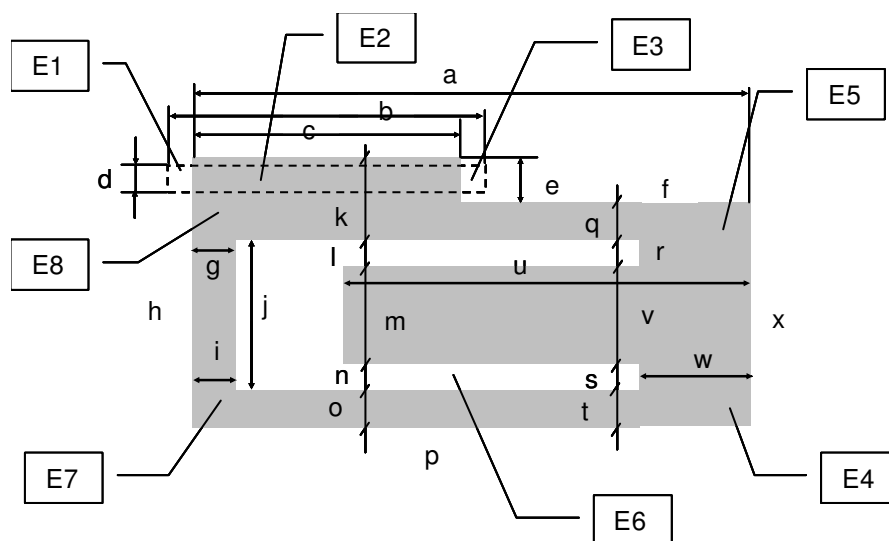


Figura AII.2 Representação esquemática da placa PLS164 mostrando as dimensões medidas

Analisando os resultados apresentados, a variação de dimensões não é significativa. No caso das peças PLS a variação das dimensões do comprimento e da largura tendem a contribuir para um aumento da massa de 1.17%. O mesmo acontece na espessura, pelo que se atribui como média, uma espessura da chapa de 1.017mm, que é utilizado na modelação por elementos finitos. Nas placas PLP há uma tendência de variação semelhante que conduz ao aumento da massa de 1.5%. Nestes modelos existe um valor médio da espessura chapa de 1.82mm, que também é utilizado na modelação por elementos finitos.

O material empregue nos diversos prototipos tem características semelhantes, pelo que na determinação da sua densidade apenas se utiliza o material das placas PLP e assume-se ser semelhante ao das restantes. A partir da placa PLP, com a massa de 0.8519Kg, calcula-se o volume utilizando a geometria medida nos modelos fabricados, da seguinte forma:

$$V = \left( \frac{300.5 + 301}{2} \cdot 201 \cdot \frac{1.83 + 1.82 + 1.82 + 1.81 + 1.82 + 1.81}{6} \right) - 3 \cdot \frac{\pi 8.5^2}{4} = 0.109611 dm^3$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{0.8519}{0.00011} = 7744.5 Kg / m^3 \approx 7745 Kg / m^3$$

Tabela AII.3 – Dimensões das placas Pls164 (em mm)

| Cota | No. Des | Peça 1 | Var % | Peça 2 | Var % | Peça 3 | Var % | Peça 4 | Var % | Peça 5 | Var % | Peça 6 | Var % | Peça 7 | Var % |
|------|---------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|
| a    | 300     | 301    | 0,33  | 300,5  | 0,17  | 300,5  | 0,17  | 300    | 0,0   | 300    | 0,00  | 300,5  | 0,17  | 300,4  | 0,13  |
| b    | 200     |        |       |        |       |        |       | 225    | 12,5  | 200    | 0,00  | 199,7  | -0,15 |        |       |
| c    | 170     | 169    | -0,59 | 168,5  | -0,88 | 169    | -0,59 | 168,7  | -0,76 | 168,9  | -0,65 | 169    | -0,59 | 168,5  | -0,88 |
| d1   | 20      | 19,5   | -2,50 | 20     | 0,00  | 20,5   | 2,50  | 19,5   | -2,5  | 20,5   | 2,50  | 19,7   | -1,50 |        |       |
| d2   | 20      | 20     | 0,00  | 20     | 0,00  | 20     | 0,00  | 19,6   | -2,0  | 20     | 0,00  | 19,8   | -1,00 |        |       |
| d3   | 20      | 19,5   | -2,50 | 19,5   | -2,50 | 20     | 0,00  | 19,8   | -1,0  | 20     | 0,00  | 20,2   | 1,00  |        |       |
| e    | 25      | 26,5   | 6,00  | 27     | 8,00  | 27     | 8,00  | 27     | 8,0   | 26,5   | 6,00  | 26,3   | 5,20  | 26,7   | 6,80  |
| f    | 130     | 131    | 0,77  | 131    | 0,77  | 130,5  | 0,38  | 130,5  | 0,38  | 130,6  | 0,46  | 130,6  | 0,46  | 131    | 0,77  |
| g    | 20      | 19     | -5,00 | 18,4   | -8,00 | 19     | -5,00 | 18,7   | -6,5  | 18,5   | -7,50 | 18,9   | -5,50 | 18,2   | -9,00 |
| h    | 205     | 204,5  | -0,24 | 204,5  | -0,24 | 206    | 0,49  | 205,5  | 0,24  | 204,8  | -0,10 | 205,5  | 0,24  | 205,7  | 0,34  |
| i    | 20      | 19,5   | -2,50 | 19,3   | -3,50 | 19,7   | -1,50 | 19,5   | -2,5  | 19,2   | -4,00 | 19,5   | -2,50 | 19     | -5,00 |
| j    | 120     |        |       | 119,7  | -0,25 | 119,6  | -0,33 | 119,5  | -0,42 | 119,5  | -0,42 | 119,7  | -0,25 | 119,7  | -0,25 |
| k    | 55      | 54,5   | -0,91 | 55,5   | 0,91  | 55,9   | 1,64  | 55,7   | 1,27  | 55,3   | 0,55  | 55,5   | 0,91  | 56     | 1,82  |
| l    | 10      | 10     | 0,00  | 10,1   | 1,00  | 10     | 0,00  | 10,1   | 1,0   | 10     | 0,00  | 10,1   | 1,00  | 10,3   | 3,00  |
| m    | 100     | 99,2   | -0,80 | 99,3   | -0,70 | 99,5   | -0,50 | 99,5   | -0,5  | 99,3   | -0,70 | 99,4   | -0,60 | 99,5   | -0,50 |
| n    | 10      | 10,1   | 1,00  | 10,5   | 5,00  | 10     | 0,00  | 10,5   | 5,0   | 10,5   | 5,00  | 10,5   | 5,00  | 10,8   | 8,00  |
| o    | 30      | 29,1   | -3,00 | 29,5   | -1,67 | 29,7   | -1,00 | 29,7   | -1,0  | 29,8   | -0,67 | 30     | 0,00  | 29,7   | -1,00 |
| p    | 300     | 301,5  | 0,50  | 300,5  | 0,17  | 301,5  | 0,50  | 299,5  | -0,17 | 300,5  | 0,17  | 300,5  | 0,17  | 300,6  | 0,20  |
| q    | 30      | 29     | -3,33 | 29     | -3,33 | 29     | -3,33 | 29,1   | -3,0  | 29,1   | -3,00 | 29,1   | -3,00 | 29     | -3,33 |
| r    | 10      | 9,5    | -5,00 | 9,5    | -5,00 | 9,5    | -5,00 | 9,3    | -7,0  | 9,2    | -8,00 | 9,4    | -6,00 | 9,5    | -5,00 |
| s    | 10      | 10     | 0,00  | 9,7    | -3,00 | 9,7    | -3,00 | 9,7    | -3,0  | 9,8    | -2,00 | 10     | 0,00  | 9,9    | -1,00 |
| t    | 30      | 29,5   | -1,67 | 30     | 0,00  | 30,5   | 1,67  | 30     | 0,00  | 30,3   | 1,00  | 30     | 0,00  | 30     | 0,00  |
| u    | 235     | 236,5  | 0,64  | 237    | 0,85  | 237    | 0,85  | 237    | 0,85  | 237    | 0,85  | 236,5  | 0,64  | 236,7  | 0,72  |
| v    | 100     | 100    | 0,00  | 100    | 0,00  | 100    | 0,00  | 100,4  | 0,4   | 100,4  | 0,40  | 100,2  | 0,20  | 100,2  | 0,20  |
| w    | 65      | 65     | 0,00  | 65     | 0,00  |        |       |        |       |        |       |        |       |        |       |
| x    | 180     | 179,5  | -0,28 | 179,5  | -0,28 | 179,5  | -0,28 | 179,5  | -0,28 | 180    | 0,00  | 179,5  | -0,28 | 179,5  | -0,28 |
| E1   | 1,8     | 1,85   | 2,78  | 1,83   | 1,67  | 1,855  | 3,06  | 1,86   | 3,33  | 1,872  | 4,00  |        |       |        |       |
| E2   | 1,8     | 1,82   | 1,11  | 1,83   | 1,67  | 1,816  | 0,89  | 1,83   | 1,67  | 1,835  | 1,94  | 1,809  | 0,50  |        |       |
| E3   | 1,8     | 1,85   | 2,78  | 1,82   | 1,11  | 1,813  | 0,72  | 1,88   | 4,44  | 1,9    | 5,56  |        |       |        |       |
| E4   | 1       | 1,025  | 2,50  | 1,017  | 1,70  | 1,015  | 1,50  | 1,015  | 1,5   | 1,015  | 1,50  | 1,012  | 1,20  | 1,017  | 1,70  |
| E5   | 1       | 1,02   | 2,00  | 1,02   | 2,00  | 1,013  | 1,30  | 1,017  | 1,7   | 1,021  | 2,10  | 1,008  | 0,80  | 1,018  | 1,80  |
| E6   | 1       | 1,025  | 2,50  | 1,022  | 2,20  | 1,018  | 1,80  | 1,01   | 1,0   | 1,015  | 1,50  | 1,015  | 1,50  | 1,021  | 2,10  |
| E7   | 1       | 1,02   | 2,00  | 1,022  | 2,20  | 1,021  | 2,10  | 1,01   | 1,0   | 1,031  | 3,10  | 1,013  | 1,30  | 1,023  | 2,30  |
| E8   | 1       | 1,02   | 2,00  | 1,022  | 2,20  | 1,013  | 1,30  | 1,015  | 1,5   | 1,019  | 1,90  | 1,009  | 0,90  | 1,008  | 0,80  |

A matéria prima utilizada é chapa de aço fina e laminada a frio (Cold Rolled Coils) com 1 mm e 1.83 mm de espessura para estampagem profunda, tipo RRSt 14-03, cuja

composição química se apresenta na tabela AII.4, e as propriedades mecânicas na tabela AII.5, valores fornecidos pelo fornecedor.

Tabela AII.4 Composição química do material

| %C        | %P        | %S       | %Mn      |
|-----------|-----------|----------|----------|
| 0.02-0.07 | 0.025 max | 0.03 max | 0.2-0.35 |

Tabela AII.5 Principais características mecânicas do material

| Re (N/mm <sup>2</sup> ) | Rm (N/mm <sup>2</sup> ) | A80 (%) | r90     | n90       | HRockwell | Ra (μm) |
|-------------------------|-------------------------|---------|---------|-----------|-----------|---------|
| 140-210                 | 280-350                 | 38 min  | 1.6 min | 0.180 min | B38-B55   | 0.6-1.5 |

Este aço destina-se à fabricação de contentores para armazenamento de gases combustíveis, sendo capaz de suportar a embutissagem profunda, com uma grande exigência de deformação plástica, boa planeza e fácil soldabilidade. Para isso as suas características são asseguradas por um baixo teor em carbono, tratamento termo-mecânico de laminagem e recozimento. O ciclo de fabricação desta chapa inicia-se com bobinas obtidas por laminagem a quente e pre-decapadas sendo depois reaquecidas em ambiente de gás inerte de protecção, à temperatura sub-crítica de 650 a 700 °C. O objectivo é eliminar as tensões residuais devidas ao trabalho de laminagem que podem originar fracturas nas operações de conformação posteriores. Na produção desta chapa fina é utilizada laminagem a frio, controlada, lubrificada e embalada em rolos. A limitação da percentagem dos elementos na composição da liga, indicados na tabela AII.4, diminuem a possibilidade de fissuração e asseguram uma boa soldabilidade. Na tabela AII.6 apresentam-se os resultados obtidos experimentalmente.

Tabela AII.6 Composição química do material obtida por análise química

| Espessura | %C    | %Mn  | %P    | %S    | %Cr   | %Ni   |
|-----------|-------|------|-------|-------|-------|-------|
| 1 mm      | 0.029 | 0.26 | 0.006 | 0.008 | 0.02  | 0.025 |
| 1.8 mm    | 0.025 | 0.24 | 0.006 | 0.004 | 0.027 | 0.024 |

As principais características mecânicas são obtidas através do ensaio universal de tracção, associado com a extensometria para a determinação das constantes elásticas do material. Neste caso como se trata de chapa de parede fina, a tensão perpendicular ao seu plano da superfície não tem significado relativamente às tensões complanares. Nestas circunstâncias considera-se que se está na presença de um estado plano de tensões, o que permite usar o método experimental de extensometria eléctrica para a determinação do coeficiente de Poisson.

Obtêm-se tiras de chapa, de 20mm de largura e 300 mm de comprimento a partir da mesma chapa utilizada nos protótipos, como provetes, para cada espessura. Os dois primeiros provetes são submetidos ao ensaio de tracção em conformidade com a norma AFNOR A03-160. Num terceiro, é colada uma roseta de dois extensómetros a 90°, e depois cada um destes provetes é submetido ao ensaio de tracção, sem ultrapassar o limite elástico do material. Na tabela AII.7, apresentam-se os resultados obtidos. O quarto provete, L4, rompeu fora dos traços de referência pelo que não foi possível determinar a extensão após rotura. Fez-se então um novo ensaio num provete L5. Nos gráficos, representados nas figuras AII.3 e AII.4, apresentam-se os resultados obtidos no ensaio de tracção. Noutro provete é aplicada uma roseta de dois extensómetros a 90°, como se mostra na figura AII.5a), tendo sido submetido ao ensaio de tracção, sem ultrapassar o limite elástico do material obtendo-se as extensões longitudinais e transversais e também o coeficiente de Poisson. As rosetas utilizadas, do tipo rectangular cujas principais características se descrevem na tabela AII.8, são alinhadas de forma que os elementos fiquem alinhados com os eixos principais do provete. Num novo provete, monta-se o extensómetro mecânico, de acordo com a figura AII.5b) para confirmação de resultados. Os resultados obtidos são apresentados na tabela AII-9.

Tabela AII.7 Principais características mecânicas do material obtidas no ensaio à rotura

| Ref | Espessura<br>[mm] | Largura<br>[mm] | Área<br>[mm <sup>2</sup> ] | Limite de elasticidade<br>a 0,2% [MPa] | Resistência à<br>tracção<br>[MPa] | Alongamento<br>após rotura<br>[%] |
|-----|-------------------|-----------------|----------------------------|--|-----------------------------------|-----------------------------------|
| L1  | 1.83              | 19.65           | 36                         | 197                                    | 297                               | 45                                |
| L2  | 1.83              | 19.74           | 36.1                       | 190                                    | 299                               | 42.5                              |
| L3  | 1.03              | 19.16           | 19.7                       | 147                                    | 277                               | 43                                |
| L4  | 1.03              | 19.64           | 20.2                       | 131                                    | 280                               | -                                 |
| L5  | 1.03              | 19.59           | 20.2                       | 139                                    | 276                               | 41.25                             |

Tabela AII.8 Características do extensómetro eléctrico

|                     |                            |
|---------------------|----------------------------|
| Fornecedor          | Micro - Measurements Group |
| Modelo              | WA-06-250WT-120            |
| Resistência         | 120 ±0.4 Ω                 |
| Sensibilidade axial | 2.05                       |
| Comprimento inicial | 6,35 mm                    |
| Alimentação (V)     | 6 V                        |

Tabela AII.9 Principais características mecânicas obtidas no ensaio de tracção

| Espessura<br>[mm] | Largura<br>[mm] | Área<br>[mm <sup>2</sup> ] | Módulo de Elasticidade<br>[MPa] |
|-------------------|-----------------|----------------------------|---------------------------------|
| 1.83              | 20.41           | 37.35                      | 1.75x10 <sup>5</sup>            |

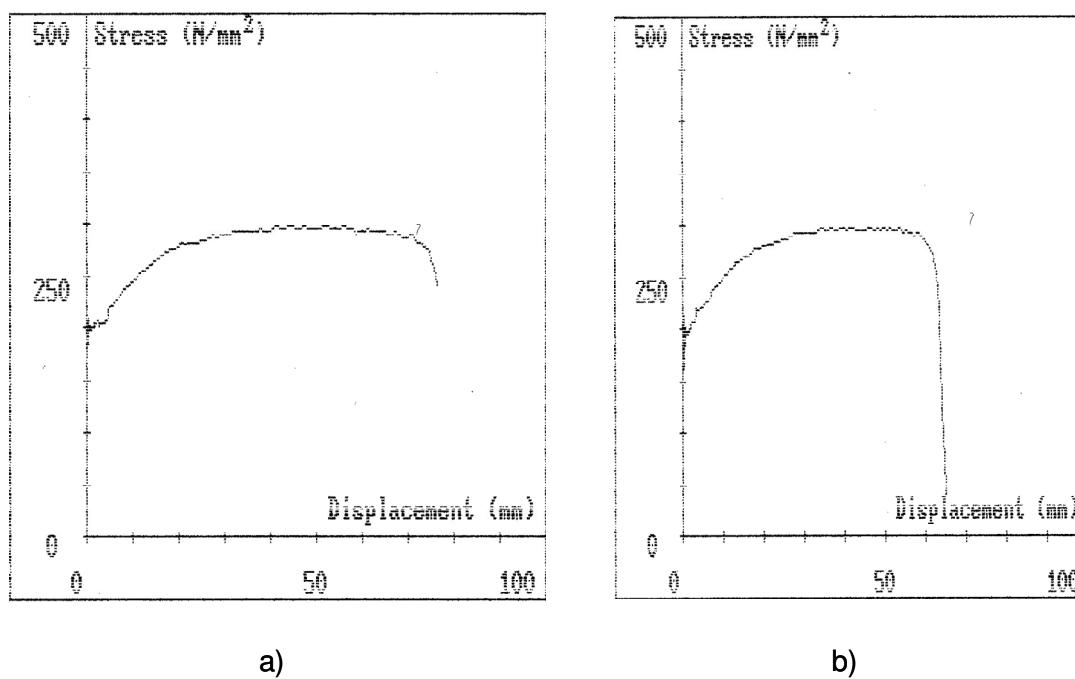


Figura AII.3 Ensaio de tracção dos provetes: a) L1 e b) L2

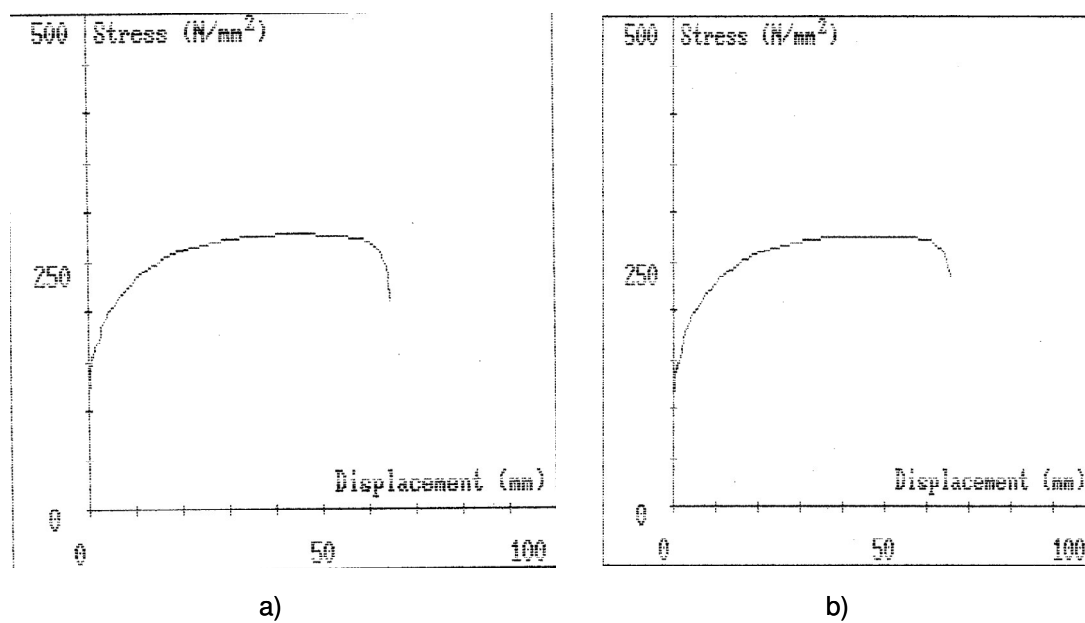


Figura AII.4 Ensaio de tracção dos provetes: a) L3 e b) L5

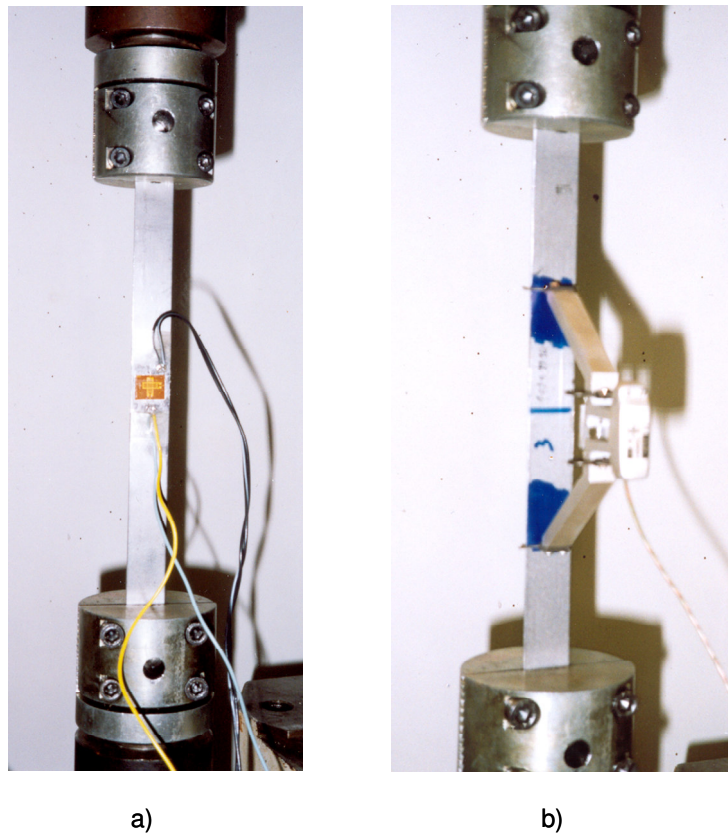


Figura AII.5 Ensaio de tracção dos provetes utilizando: a) Extensómetro eléctrico e b) Extensómetro mecânico

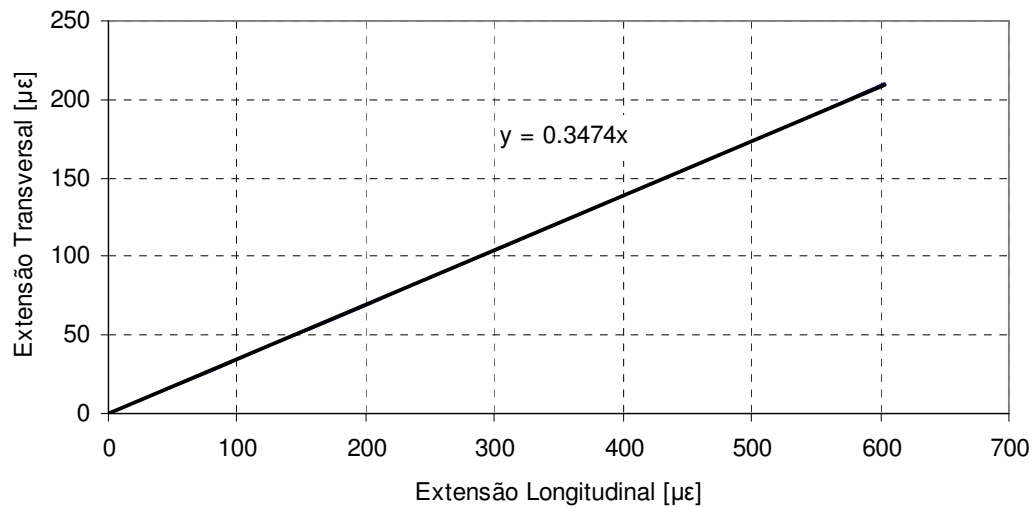


Figura AII.6 Determinação do Coeficiente de Poisson no provete L7 de 1.8 mm

O coeficiente de Poisson obtido através do ensaio do provete de 1.83 mm, utilizando o extensómetro eléctrico é dado por  $\nu = -\epsilon_x / \epsilon_y = 0.347$ , figura AII.6. A análise destes



resultados permite concluir que o coeficiente de Poisson é muito elevado e o módulo de elasticidade muito baixo. Estes resultados indiciam que este material não deve ter sido submetido ao tratamento termo-mecânico na laminagem nem ao recozimento de recristalização. A chapa escolhida para os ensaios apresenta fortes indícios de: ser anisotrópica, apresentando características diferentes nas duas direcções principais, estar deformada plasticamente a frio e sem tratamento de homogeneização, podendo ter um comportamento mecânico diferente em relação a um aço de construção corrente.

Quanto à chapa de 1 mm, foram retirados dois provetes um longitudinalmente LC e outro perpendicularmente TC em relação ao sentido de laminagem, para comparação dos resultados. No entanto neste ensaio, como a chapa é muito fina, deforma-se com facilidade alterando as condições iniciais do ensaio. Os provetes apresentam com facilidade uma curvatura inicial que introduz pequenos erros iniciais tanto utilizando extensómetro mecânico como com as rosetas eléctricas, que têm de ser descontados nas análises. O valor obtido para o coeficiente de Poisson é apresentado na figura AII.7 e é de  $\nu = 0.329$  que continua a ser um valor elevado. O valor do módulo de elasticidade encontrado é aproximadamente de  $E = 1.69 \times 10^5$  MPa, obtido através do extensómetro eléctrico cujos valores estão menos afectados dos erros iniciais.

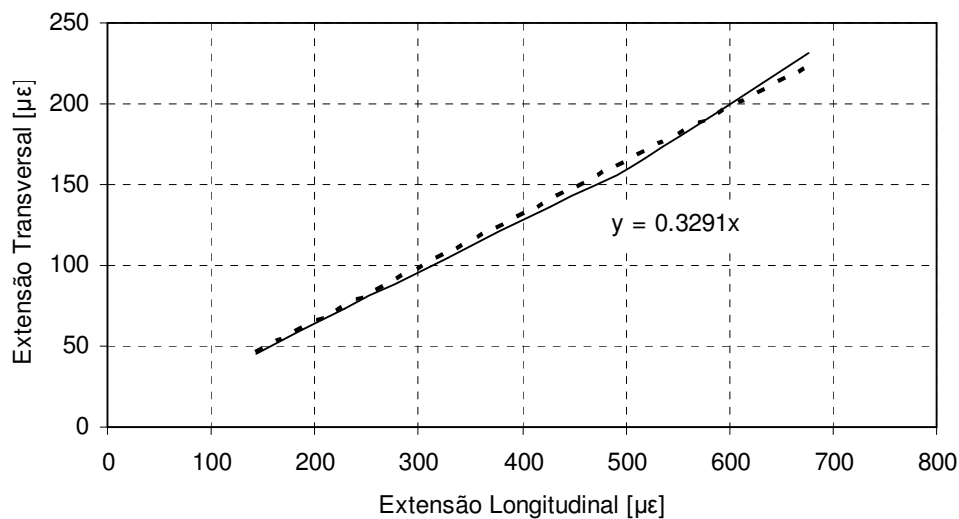


Figura AII.7 Determinação do Coeficiente de Poisson no provete LC de 1 mm

Para os ensaios no provete transversal TC, obtém-se o módulo de elasticidade de  $E = 1.94 \times 10^5$  MPa, através dos extensómetros eléctricos. Quanto ao coeficiente de Poisson mantém-se acima do normal, para este tipo de material, com um valor de  $\nu = 0.353$  como se pode observar no gráfico da figura AII.8. A análise destes resultados permite concluir que o coeficiente de Poisson se mantém elevado e o módulo de elasticidade baixo. Na tabela AII.10 apresenta-se um resumo dos resultados finais obtidos. Verifica-se que este material apresenta uma certa anisotropia com valores menores do E e  $\nu$  na direcção de laminagem indiciando falta de tratamento térmico após a laminagem. Assume-se que os valores do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson na direcção da espessura (z) são iguais aos correspondentes valores da direcção transversal (y), ou seja:

$$E_x = 1.69 \times 10^{11} \text{ MPa} \quad \nu_x = 0.329.$$

$$E_y = E_z = 1.94 \times 10^{11} \text{ MPa} \quad \nu_y = \nu_z = 0.353.$$

Tabela AII.10 Resumo das principais características mecânicas do material

|                       | Módulo de Elasticidade<br>MPa | Coefficiente de<br>Poisson |
|-----------------------|-------------------------------|----------------------------|
| Provette Longitudinal | $1.69 \times 10^5$            | 0,329                      |
| Provette Transversal  | $1.94 \times 10^5$            | 0,353                      |

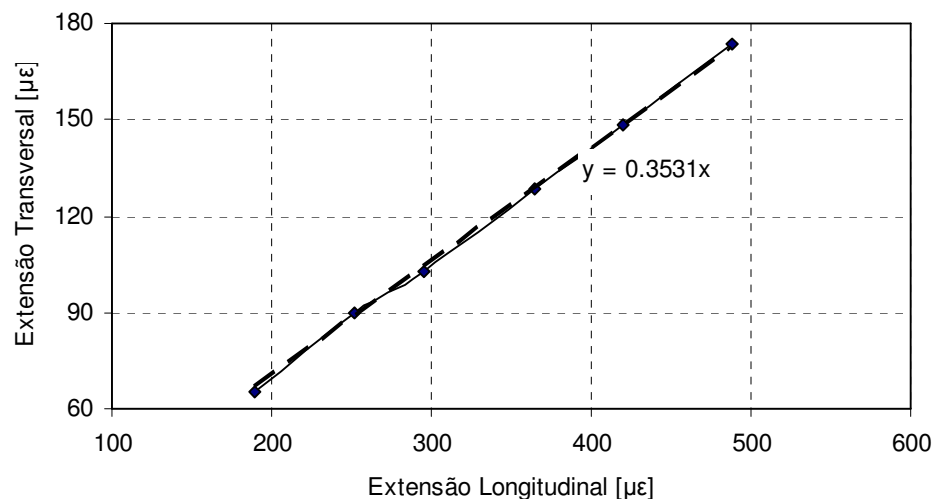


Figura AII.8 Determinação do Coeficiente de Poisson no provete TC de 1 mm

Os módulos de elasticidade transversal são calculados da seguinte forma:

$$G_{xy} = \frac{E_x E_y}{(E_x + E_y + 2 u_{xy} E_x)} = \frac{1.69 \times 10^{11} \times 1.94 \times 10^{11}}{(1.69 \times 10^{11} + 1.94 \times 10^{11} + 2 \times 0.329 \times 1.69 \times 10^{11})} = 6.9139 \times 10^{10} MPa$$

$$G_{yz} = \frac{E_y E_z}{(E_y + E_z + 2 u_{yz} E_y)} = \frac{1.94 \times 10^{11} \times 1.94 \times 10^{11}}{(1.94 \times 10^{11} + 1.94 \times 10^{11} + 2 \times 0.353 \times 1.94 \times 10^{11})} = 7.1693 \times 10^{10} MPa$$

$$G_{xz} = \frac{E_x E_z}{(E_x + E_z + 2 u_{xz} E_x)} = \frac{1.69 \times 10^{11} \times 1.94 \times 10^{11}}{(1.69 \times 10^{11} + 1.94 \times 10^{11} + 2 \times 0.353 \times 1.69 \times 10^{11})} = 6.7976 \times 10^{10} MPa$$



## **APENDICE III – EQUIPAMENTO EXPERIMENTAL: CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS**

Para a realização dos ensaios experimentais envolvidos neste trabalho utiliza-se um sistema de análise espectral que se descreve neste apêndice. O sistema é constituído por um analisador de sinais multicanal Pulse, tipo 3560 C, que permite a aquisição de dados e está concebido com um interface de ligação a computador, 5 canais de entrada e dois de saída. O sistema assim concebido permite comunicações com um PC, enquanto mede sinais através das entradas e saídas. Este equipamento é composto por um módulo de interface de rede tipo 7533 e um módulo 3109 de entradas e saídas. O número de canais disponível não é suficiente para a quantidade de transdutores envolvidos pelo que se realizam, quando necessário, dois ensaios por peça. Na figura AIII.1 mostram-se os principais componentes utilizados.

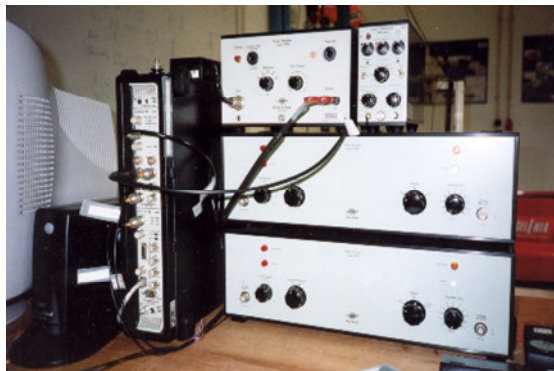


Figura AIII.1 Conjunto de equipamento de análise de vibrações.

O programa para análise de ruído e vibrações, é composto por vários módulos que permitem a interacção com o analisador. Neste módulos criam-se projectos de análise, faz-se a leitura dos transdutores, calibram-se os transdutores e criam-se as funções de pós processamento, como mostrar resultados e criar relatórios.

O Vibrador de excitação, figura AIII.3, modelo 4809, de 45 N de força, tem uma gama de frequências de 10 Hz a 20 KHz e aceleração máxima de  $736\text{ms}^{-2}$ . Recebe o sinal proveniente do sistema multi-canal amplificado pelo amplificador de potência modelo 2712.

Outros elementos muito importantes neste estudo são os transdutores. É a partir deles que se vão conseguir os sinais eléctricos proporcionais aos esforços e movimentos envolvidos. Estando estes elementos aplicados directamente às peças a ensaiar, deve verificar-se qual a influência da sua massa na massa da estrutura em estudo, assim como ajuizar sobre os processos de ligação do próprio transdutor dentro do sistema. Um dos objectivos neste trabalho é precisamente a análise dos diversos processos de ligação entre componentes e o seu efeito sobre os resultados. O transdutor de força da marca Brüel & Kjær: modelo Tipo 8200, apresentado na figura AIII.2, está concebido para a medida das FRF quando usado em conjunto com um acelerómetro. Este transdutor trabalha com o efeito piezoeléctrico de quartzo que, quando carregado, produz uma carga eléctrica que é proporcional à força actuante no cristal. Esta carga é medida electronicamente obtendo-se, com uma precisão de  $4.09\text{ pC/N}$ , o sinal correspondente à força para a qual o transdutor está sujeito. O elemento piezoeléctrico de quartzo é muito pouco sensível às variações de temperatura.

A resistência mecânica global do transdutor é alta, assegurando assim que tem uma frequência de ressonância alta, e que, quando é introduzido num sistema mecânico tem um efeito muito pequeno na perturbação da deformação. No entanto como a capacidade interna do transdutor é muito baixa, é recomendado uso de um amplificador de carga. Neste caso foi usado o Brüel & Kaer Tipo 2635. A utilização de amplificadores de carga permite o uso de cabos longos sem perturbar electricamente a calibração do transdutor. O baixo nível de ruído interno neste pré-amplificador permite a medida de forças muito baixas.

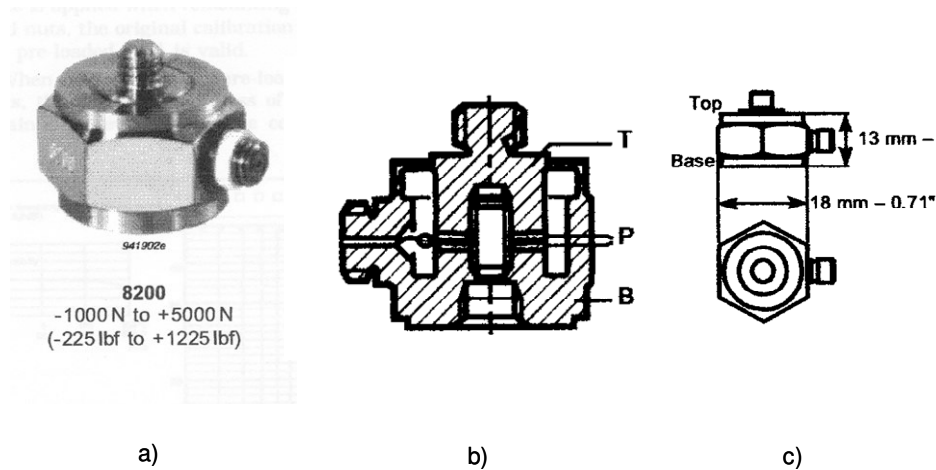


Figura AIII.2 Transdutor de força tipo 8200: a) Vista em perspectiva, b) corte longitudinal: T - Topo, P - Discos Piezoelétricos, B - Base, c) Principais dimensões

A massa interna destes transdutores pode influenciar os resultados da medição porque o transdutor de força ao ser montado sobre a estrutura a solicitar, vai influenciar a sua massa total. Efectivamente o vibrador aplica a força através da caixa do transdutor ao topo do cristal, que por sua vez transmite à estrutura, mas não integralmente, uma vez que é necessária alguma quantidade de força para acelerar a base de suporte do cristal. A massa da parte livre do transdutor de força é considerada pequena e portanto normalmente insuficiente para se minimizar a modificação provocada na estrutura. No entanto deve-se ponderar na forma como é montado na estrutura. Existe alguma diferença entre a massa da base e da tampa do transdutor, que convém verificar para minimização da sua interferência. Para um modelo comercial como este, a massa da base pode ser apenas de cerca de 3 g, enquanto que a massa do transdutor total ronda as 21 g.

Quando não pode ser dispensada a massa do transdutor, aconselha-se o uso de uma operação designada por cancelamento de massa (Maia et al., 1998). Para atender a esta preocupação fizeram-se dois ensaios, montando directamente sobre o vibrador o transdutor de força e o acelerómetro, como se mostra na figura AIII.3 e invertendo de seguida a posição de montagem do transdutor de força. Através do equipamento de análise espectral é possível obter o valor da aceleração para uma dada força de excitação aplicada ao conjunto. Com uma balança de alta resolução pesam-se os diversos componentes da montagem, tendo-se obtido os seguintes valores: massa do transdutor de força

$m_{lr} = 21.533\text{ g}$  , massa do acelerómetro  $m_{acel} = 10.875\text{ g}$  , massa do perno de ligação  $m_p = 0.627\text{ g}$  e massa do perno juntamente com a anilha  $m_{a+p} = 1.034\text{ g}$  .



Figura AIII.3 Determinação da massa influente do transdutor de força

Obtidas as massas dos vários componentes, podem-se simular os seguintes ensaios:

1º Ensaio - O transdutor de força e o acelerómetro são montados no vibrador como se mostra na figura AIII.4.

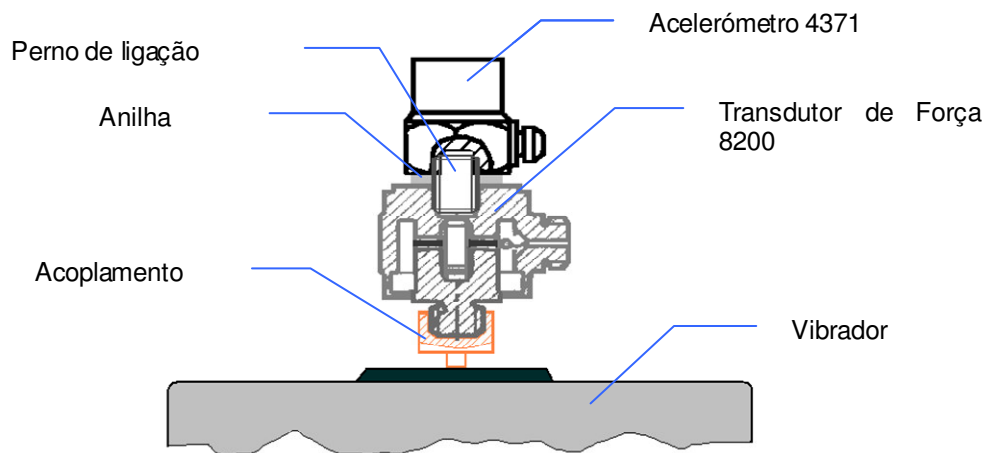


Figura AIII.4 Montagem de componentes no primeiro ensaio

A relação entre a aceleração  $\ddot{x}$  e a força  $F$  imposta pelo vibrador, é dada pela expressão:



$$\mathbf{F} = (m_{activa1} + m_{a+p} + m_{acel}) \cdot \ddot{\mathbf{x}} \quad (\text{AIII.1})$$

onde  $m_{activa1}$  representa a massa da parte do transdutor de força, que fica após os cristais piezoelétricos, que se pretende determinar. Assim:

$$m_{activa1} = \frac{\mathbf{F}}{\ddot{\mathbf{x}}} - m_{a+p} - m_{acel} = 30.7 \times 10^{-3} - 1.034 \times 10^{-3} - 10.875 \times 10^{-3} = 18.791 \times 10^{-3} \text{ Kg}$$

em que  $\mathbf{F}/\ddot{\mathbf{x}} = 30.7 \times 10^{-3} \text{ Kg}$  é valor obtido no equipamento de ensaio. A massa assim obtida corresponde à massa da base do transdutor e será então adicionada à da estrutura no valor de 18.791g. Como se sabe o valor da massa total do transdutor, pode-se obter a massa do seu topo (ver figura AIII.2), pela diferença:

$$m_{topo} = m_{tr} - m_{activa1} = 21.533 - 18.791 = 2.742 \text{ g}$$

2º Ensaio - O transdutor de força é montado no vibrador de forma invertida através do perno e a sua parte macho é montada no acelerómetro passando através da anilha, como se mostra na figura AIII.5. Considerando novamente a expressão anterior, entre a aceleração  $\ddot{\mathbf{x}}$  e a força,  $\mathbf{F}$ , pode-se obter a massa activa 2 da seguinte forma:

$$\mathbf{F} = (m_{activa2} + m_a + m_{acel}) \cdot \ddot{\mathbf{x}}$$

em que  $m_{activa2}$  representa a massa da nova parte do transdutor de força que fica após os cristais piezoelétricos, que pretendemos determinar. Assim teremos:

$$m_{activa2} = \frac{\mathbf{F}}{\ddot{\mathbf{x}}} - m_a - m_{acel} = 15.3 \times 10^{-3} - (1.034 \times 10^{-3} - 0.627 \times 10^{-3}) - 10.875 \times 10^{-3}$$

$$m_{activa2} = 4.018 \times 10^{-3} \text{ Kg}$$

em que  $\mathbf{F}/\ddot{\mathbf{x}} = 15.3 \times 10^{-3} \text{ Kg}$  é novo valor obtido no ensaio. A massa aqui calculada corresponde então à massa do topo do transdutor e adicionará à estrutura 4.018g. Então a massa total do transdutor é:

$$m_{tr} = m_{activa1} + m_{activa2} = 18.791 + 4.018 = 22.809 \text{ g} \neq 21.533 \text{ g}$$

Esta diferença de 1.276g deve estar relacionada com a massa dos próprios cristais piezoelétricos e/ou pela resistência mecânica do processo de vedação entre a base e o

topo, que é comum nos dois ensaios. Esta diferença de massas corresponde a cerca de 6% da massa do transdutor. Pode-se concluir que esta segunda montagem será a recomendada, ou seja o topo do transdutor é que deve ser aplicado na estrutura. Caso contrário cerca de 19 g são adicionadas à estrutura correspondendo no caso da peça PLS164 a cerca de 5% da sua massa.

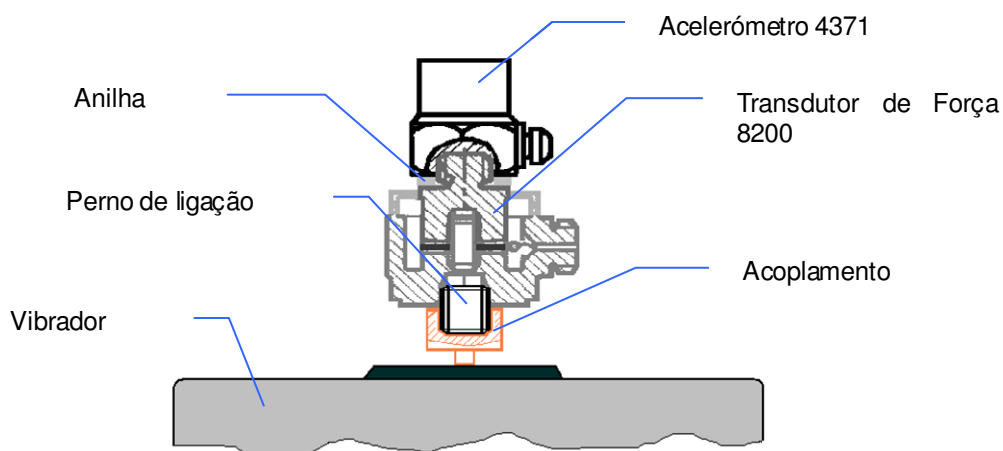


Figura AIII.5 Montagem de componentes no segundo ensaio

Os acelerômetros são os transdutores mais utilizados nos ensaios experimentais envolvidos neste trabalho. Estes possuem uma massa sísmica interior que, quando solicitada dinamicamente, produz uma força que é aplicada sobre os cristais piezoelétricos deformando-os. Unindo firmemente a base do acelerômetro ao ponto onde se quer medir a aceleração, o movimento da base dá origem a forças de inércia na massa sísmica, que por sua vez deforma os cristais dando lugar a variações de tensão elétrica. Como a massa é constante as variações de força são proporcionais à variação da aceleração.

Os acelerômetros utilizados nestes ensaios são da marca Brüel & Kjær e estão apresentados na tabela AIII.1. Estes transdutores têm uma boa resposta num patamar de frequência que vai de cerca de 4 Hz a 5 KHz. No entanto o modelo tipo 4371 apresenta uma sensibilidade cerca de 10 vezes inferior aos restantes.

Tabela AIII.1 Acelerômetros utilizados nos ensaios

| Modelo tipo | Peso [g] |
|-------------|----------|
| 4371        | 11       |
| 4507        | 4,8      |
| 4508 B      | 4,8      |

A sensibilidade do transdutor é a relação entre o sinal eléctrico de saída por unidade de aceleração mecânica comunicada, cujas unidades podem ser portanto  $[mV/g]$ , ou  $[pC/g]$ , ou  $[mV/ms^{-2}]$  e  $[mV/g]$ . O sinal transmitido por este transdutor (4371) necessita de ser amplificado por um amplificador de carga externo, enquanto que os outros possuem um amplificador incorporado.

O acelerómetro tipo 4371 possui 3 cristais piezoeléctricos montados em delta e 3 massas montadas em configuração triangular à volta do centro também triangular, como mostrado na figura AIII.6. A sua base bastante rígida garante que possui altas frequências de ressonância e elevado isolamento à interferência de deformações provocadas por eventuais acções externas durante os ensaios. A montagem é feita por aperto através de um furo roscado. Este tipo de acelerómetro é utilizado na determinação da massa interna do transdutor de força.

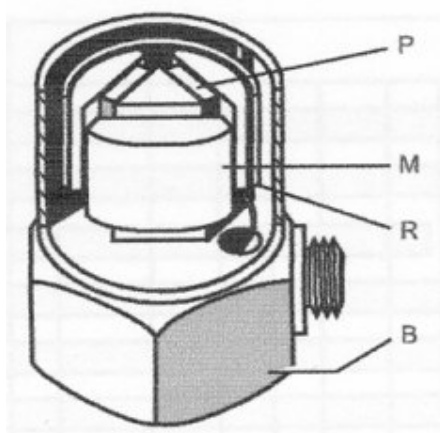


Figura AIII.6 Aspecto interior do acelerómetro tipo 4371, em que: P - Elemento piezoeléctrico, M - Massa sísmica, R - Anel de fixação e B - Base de montagem

Os acelerómetros tipo 4507 e 4508B muito mais leves, possuem 2 cristais piezoeléctricos montados de acordo com a figura AIII.7. Diferem entre si pela forma de montagem em relação à ficha de conexão. O 4507 é de montagem transversalmente e o 4508B axialmente. A ligação prevista do acelerómetro à estrutura é por colagem através de um pequeno suporte em polímero. Os acelerómetros possuem dois pequenos encaixes laterais para montagem no suporte. Este tipo de montagem é mais prática que a conseguida por aperto roscado na estrutura, no entanto fica-se dependente da colagem, cuja aderência pode não ser tão eficiente (Brüel & Kjær, 1986). O principal problema é que não é

garantida a montagem no local exacto e direcção correcta (paralelismo da base do transdutor em relação à face de assentamento da estrutura). Efectivamente, o posicionamento correcto dos suportes, no local previsto, é mais difícil de garantir, por falta de pontos de referência. Em compensação com esta montagem os acelerómetros podem ser montados e desmontados assegurando a repetibilidade permitindo maior operacionalidade e produtividade.

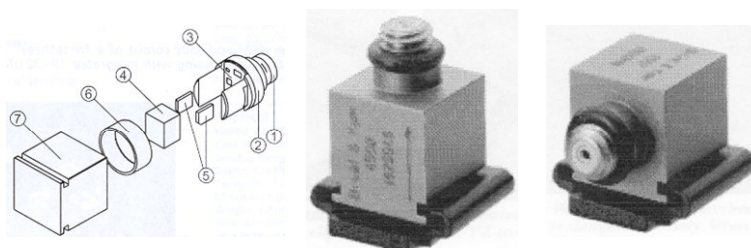


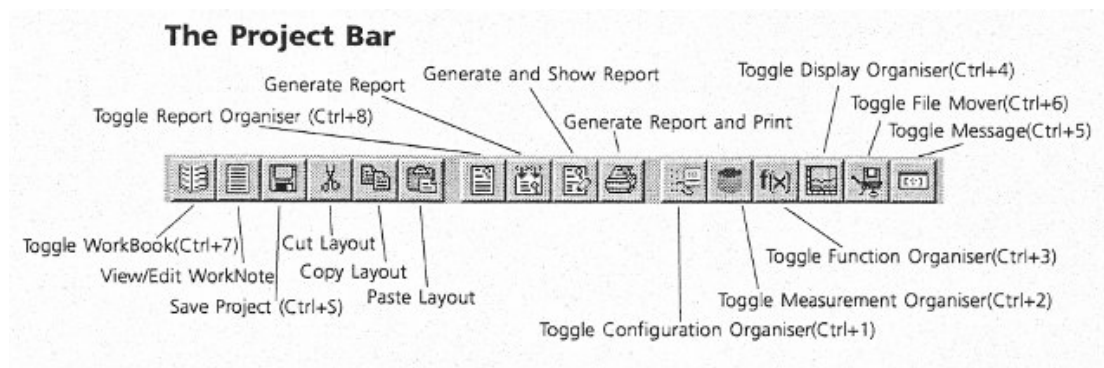
Figura AIII.9 Representação explodida e vista exterior dos acelerómetros tipo 4508B e 4507, já montados nos suportes, com: 1 - Ficha de conexão, 2 - Topo integrador de componentes que contem o amplificador, 3 - Suporte interno, 4 - Massa sísmica, 5 - Dois elementos piezoeléctricos, 6 - Anel de fixação, 7 - Caixa exterior de titâneo.

De seguida descrevem-se sumariamente alguns dos procedimentos usados durante os ensaio. O acelerómetros são montados nas estruturas através de bases idênticas às mostradas na figura AIII.7. Para a colagem das bases dos sensores usa-se uma cola fornecida em dois componentes, um Pó: X60 Schnellklebstoff, Komponente A (R43) e um Líquido: Schnellklebstoff X60, Komponente B (R11), cujo Fabricante é HBM Wägetechnik GmbH.

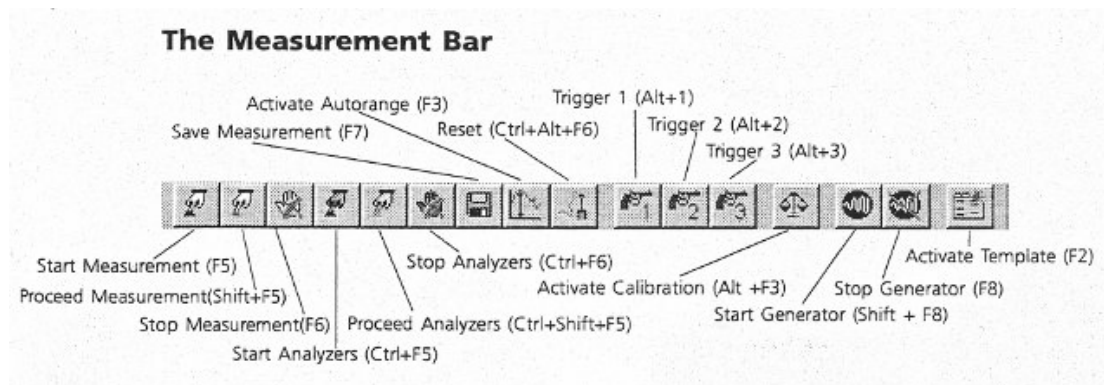
O procedimento a usar para a execução de um ensaio utilizando o equipamento atrás descrito, apresentado na figura AIII.1, é o seguinte:

- 1º - Verifica-se se todos os cabos estão ligados;
- 2º - Liga-se o amplificador de carga do transdutor de força, 2635;
- 3º - Liga-se o amplificador de sinal do vibrador, 2706;
- 4º - Liga-se o módulo 7533 e aguarda-se um pouco até o equipamento estar em funcionalidade, a luz verde acende;

- 5º - Inicia-se a operação com o software pulse; Constroi-se o programa de execução de cada ensaio.
- 6º - Acede-se ao programa do ensaio específico (entretanto o computador comunica por rede com o módulo 7533);
- 7º - Verifica-se se os inputs estão reconhecidos, usando no monitor o comando “configuration organiser”;



- 8ª - Selecciona-se "Activate template" (há nova comunicação computador - módulo);



- 9º - Coloca-se o ganho no amplificador do vibrador em zero;
- 10º - Dá-se ordem no computador para arranque do vibrador "Start generator";
- 11º - Regula-se no amplificador do vibrador o ganho para um valor razoável;
- 12º - Dá-se ordem de "Start measurements (F5)" para início das leituras e médias;

13° - Observa-se no "config" se os diversos gráficos estão limpos, sem zonas com muitas interferências, e deixa-se acabar o cálculo das médias até ao valor escolhido de 500;

14° - Pára-se o ensaio;

15° - Volta-se ao "config" e gravam-se os diversos  $H_{if_i}$

16° - Fecha-se o software pulse;

Volta ao início do processo...

Para se observar com clareza os modos de vibração, recorre-se ao estroboscópio que permite fazer observação directa deste fenómeno. O estroboscópio deve ser regulado para uma frequência de emissão de luz intermitente de cerca de 25 Hz acima ou abaixo da frequência de vibração da peça em observação. O movimento aparenta ser mais lento do que realmente é e quanto menor for a diferença de frequência entre o movimento real e o aparente mais lento se apresenta. Esta diferença tem a ver com a capacidade humana de visão, de cerca de 25 imagens por segundo. Efectivamente se a frequência de intermitência da luz projectada sobre a peça a vibrar for próxima da sua frequência de vibração, não é possível observar o modo de vibração pretendido, pois não há sensibilidade suficiente para a percepção do movimento. Para frequências de vibração muito baixas, abaixo da dezena de Hz, a observação pode até ser feita sem auxílio de estroboscópio, por razões semelhantes.